Analyse Fonctionnelle et Analyse Fourier
Manuscrit Personnel

Stilianos Louca

Janvier 2011

Table des matières

1 Rappels et compléments sur les espaces L^p

1.1 Rappels élémentaires

1.1.1 Definition: $\mathcal{L}^p$

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré, avec la σ-algèbre $\mathfrak{S}$ et mesure μ. Pour $p \in [1, \infty)$ et fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ on définit

$$\|f\|_p := \left[\int_\Omega |f|^p \ d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\|f\|_\infty := \operatorname{supess}|f| := \inf\{M \geq 0 \ : \ |f| \leq M \ \mu - \text{presque partout}\} \quad .$$

On définit pour $p \in [1, \infty]$:

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) := \left\{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \ \middle| \ \|f\|_p < \infty\right\}$$

comme l'espace des fonctions **p-intégrables** ($p < \infty$) ou **essentiellement bornées** ($p = \infty$).

Remarques :

(i) Toute mesurable $f : \Omega \to \mathbb{K}$ satisfait $|f| \leq \|f\|_\infty$.

(ii) Soit $p \in [1, \infty]$. Si on regarde la relation d'équivalence

$$f \sim_\mu g :\Leftrightarrow \ \mu(\{f \neq g\}) = 0 \quad ,$$

alors on a $\|f - g\|_p = 0$ ssi $f \sim_\mu g$.

1.1.2 Definition: L^p

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$. On définit

$$L^p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)/\sim_\mu$$

comme l'ensemble des classes $[f]_\mu$ d'équivalence de fonctions égales μ-presque partout dans $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$. Généralement on identifie un élément de $L^p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ d'un de ses représentants, et on écrit souvent f au lieu de $[f]_\mu$.

Remarques

(i) Par remarque 1.1.1(ii) ci-dessus, si deux fonctions $f, g \in \mathcal{L}^p$ sont dans la même classe, alors $\|f\|_p = \|g\|_p$ et

$$\|\cdot\|_p : L^p \to \mathbb{R}_+ \quad , \quad \left\| [f]_\mu \right\|_p := \|f\|_p$$

est bien définie sur L^p.

(ii) En notant $\mathcal{L}(\Omega, \mathfrak{S}) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ mesurable}\}$ et $L(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) := \mathcal{L}(\Omega, \mathfrak{S})/\sim_\mu$, on trouve que $\mathcal{L}$ et L sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Supposons que Ω est un espace topologique, $\mathfrak{S} := \mathscr{B}(\Omega)$ la σ-algèbre borelienne de Ω et μ tel que pour toute ouverte $\emptyset \neq U \subseteq \Omega$ on a $\mu(U) > 0$. Alors, le sous-espace $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{K}$ se plonge naturellement $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{K}) \hookrightarrow L(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ via $f \mapsto [f]_\mu$. Autrement dit, deux continues $f, g \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{K})$ sont égales μ-presque partout ssi ils sont égales partout. En particulier

$$\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{K}) \cap \mathcal{L}^p(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \mu) \hookrightarrow L^p(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \mu) \quad \forall 1 \leq p \leq \infty \quad .$$

De plus, la norme $\|\cdot\|_\infty$ induit par $L^\infty(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \mu)$ sur $\mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{K})$ est exactement la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire

$$\operatorname*{supess}_{x \in \Omega} |f(x)| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{K}) \quad .$$

1.1.3 Definition: L^p_{loc}

Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ et $1 \leq p \leq \infty$. Soit X un espace topologique et μ un mesure sur la σ-algèbre Borelienne $\mathscr{B}(X)$. On note

$$L^p_{\text{loc}}(X, \mathscr{B}(X), \mu) := \left\{ [f]_\mu \ \middle|\ f : X \overset{\text{mesurable}}{\longrightarrow} \mathbb{K},\ \|f\|_{L^p(K, \mathscr{B}(K), \mu)} < \infty \ \ \forall \text{ compacte } K \subseteq X \right\}$$

la famille des fonctions **localement intégrables** ($p < \infty$) où **localement bornées** ($p = \infty$) sur $(X, \mathscr{B}(X), \mu)$.

Remarques

(i) On a toujours $L^p(\mu) \subseteq L^p_{\text{loc}}(\mu)$.

(ii) Si μ est une mesure de Radon, alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on a $L^p(\mu) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\mu)$.
Preuve : Par A.3.5 toute compacte possède mesure finie. Si $K \subseteq X$ est compact, alors

$$\int_K |f| \ d\mu = \int_\Omega |f \cdot 1_K| \ d\mu \overset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\|f\|_p}_{<\infty} \cdot \underbrace{\|1_K\|_q}_{<\infty} < \infty \quad .$$

1.2 Inégalités dans $\mathcal{L}^p$

1.2.1 Théorème : Inégalité de Jensen

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace de probabilité et $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour toute fonction réelle $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ on a

$$\Phi\left[\int f \ d\mu\right] \leq \int \Phi(f) \ d\mu \quad ,$$

tant que les deux intégraux existent.

Preuve : Considérons

$$E_\Phi := \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid at + b \leq \Phi(t) \ \forall \ t \in \mathbb{R}\right\} \quad .$$

Alors

$$\Phi(t) = \sup_{(a,b) \in E_\Phi} (at + b) \quad \forall \ t \in \mathbb{R}$$

et on a donc

$$\int_\Omega \Phi(f) \ d\mu = \int_\Omega \sup_{(a,b) \in E_\Phi} (af + b) \ d\mu \geq \sup_{(a,b) \in E_\Phi} \int_\Omega (af + b) \ d\mu$$

$$= \sup_{(a,b) \in E_\Phi} \left[a \int f \ d\mu + b \underbrace{\mu(\Omega)}_{1}\right] = \Phi\left[\int f \ d\mu\right] \quad .$$

□

1.2.2 Théorème : Inégalité de Hölder

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On dit que les exposants p, q sont **conjugues de Hölder**. Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ mesurables. Alors

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad . \tag{1.2.2.1}$$

Équivalent, pour $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ tels que $\alpha + \beta = 1$, on a

$$\left\|f^\alpha g^\beta\right\|_1 \leq \|f\|_1^\alpha \cdot \|g\|_1^\beta \quad .$$

Preuve : On va retrouver le résultat en appliquant l'inégalité de Jensen. On peut supposer que $0 < \|f\|_p , \|g\|_q < \infty$, car sinon l'inégalité serrait triviale. Si $p = 1, q = \infty$ (ou reversement) l'inégalité est triviale parce que $|fg| \leq \|g\|_\infty |f|$ μ-presque partout. Donc on peut supposer $1 < p, q < \infty$. Bien sûr on peut supposer en plus $f, g \geq 0$.
Alors, la mesure $d\nu := g^q \ d\mu / \|g\|_q^q$ est une probabilité. On applique l'inégalité de Jensen 1.2.1 à la convexe $\Phi(t) := t^p, \ t > 0$ et la fonction $F := f \cdot g^{1-q}$, pour obtenir

$$\frac{\|fg\|_1^p}{\|g\|_q^{qp}} = \left[\int F \ d\nu\right]^p \overset{\text{Jensen}}{\leq} \int F^p \ d\nu = \frac{1}{\|g\|_q^q} \int f^p \underbrace{g^{p+q-pq}}_{1} \ d\mu = \frac{\|f\|_p^p}{\|g\|_q^q}$$

et donc

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad .$$

□

Remarques :

(i) En particulier, pour $f \in \mathcal{L}^p(\mu), \ g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ on a $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(ii) Si $p = q = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(iii) Par induction, on peut généraliser l'inégalité (1.2.2.1) pour plus de 2 fonctions. Soient $p_1, .., p_n \in [1, \infty]$ tels que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ et $f_i \in L^{p_i}(\mu), \ i = 1, .., n$. Alors

$$\left\|\prod_{i=1}^n f_i\right\|_1 \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i} \quad .$$

1.2.3 Théorème : Inégalité de Minkowski

Soient $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$. Alors :

1. Pour $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurables on a
$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad .$$
En particulier, si $f, g \in L^p(\mu)$ il faut $f + g \in L^p(\mu)$.
2. De plus, si $(f_k)_{k=1}^\infty$ est une suite de fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurables telle que $\sum_{k=1}^\infty f_k$ existe dans $\mathbb{C}$ ponctuellement μ-presque partout, alors
$$\left\|\sum_{k=1}^\infty f_k\right\|_p \leq \sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_p \quad . \tag{1.2.3.1}$$

Preuve :

1. Le cas $p \in \{1, \infty\}$ est évident, donc on suppose $1 < p < \infty$. Soit $q \in (1, \infty)$ le conjugué de Hölder de p. Alors
$$\|f + g\|_p^p = \int |f + g|^p \ d\mu \leq \int |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu$$
$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \cdot \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q + \|g\|_p \cdot \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q$$
$$= \|f\|_p \cdot \|f + g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \cdot \|f + g\|_p^{p-1} \quad .$$
Si $\|f + g\|_p = 0$, l'inégalité est évident. Si $\|f + g\|_p = \infty$, il faut au moins[1] $\|f\|_p = \infty$ ou $\|g\|_\infty = \infty$, donc on retrouve l'inégalité. En tout autre cas, on divise par $\|f + g\|_p^{p-1}$ est l' obtient.

1. Se rappeler à l'inégalité
$$|a + b|^p \leq ||a| + |b||^p \leq [2 \max\{|a| , |b|\}]^p = 2^p \max\{|a|^p , |b|^p\} \leq 2^p \left[|a|^p + |b|^p\right] \quad .$$

2. Considérons le cas $p = \infty$ et supposons l'inégalité (1.2.3.1) est faux. Alors, les ensembles
$$A := \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right| > \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \right\} \subseteq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| > \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \right\}$$
ont mesure strictement positive. Par conséquence au moins un f_k satisfait
$$\mu\big(|f_k| > \|f_k\|_\infty \big) > 0 \quad ,$$
ce qui est une contradiction!
En cas $1 \leq p < \infty$ on a
$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_p^p = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k \right|^p d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left| \sum_{k=1}^{n} f_k \right|^p d\mu$$
$$\overset{\text{Minkowski}}{\leq} \varliminf_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \right]^p \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \right]^p \quad ,$$
ce qui preuve l'affirmation.

□

Remarque : Par ce théorème, l'application $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathbb{R}_+$ est une demi-norme sur l'espace linéaire $\mathcal{L}^p(\mu)$ et donc une norme sur $L^p(\mu)$. On la dit souvent la **norme** L^p.

1.2.4 Lemme sur fonctions convexes, 1-homogènes

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $F : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ continue, convexe, 1-homogène. Alors pour tout positives $u, v \in L^1(\mu)$ on trouve
$$F\left[\int u \; d\mu, \int v \; d\mu \right] \leq \int F(u,v) \; d\mu \quad .$$

Preuve : Par lemme A.1.2 il existe une partie $\emptyset \neq \Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ telle que
$$F(u,v) = \sup_{(a,b)\in\Gamma} (au + bv) \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}_+ \quad .$$
En particulier, pour tout $a, b \in \Gamma$ on a
$$a \int u \; d\mu + b \int v \; d\mu = \int (au + bv) \; d\mu \leq \int F(u,v) \; d\mu \quad .$$
En prenant le supremum sur $(a,b) \in \Gamma$ on obtient
$$F\left(\int u \; d\mu, \; \int v \; d\mu \right) \leq \int F(u,v) \; d\mu \quad .$$

□

1.2.5 Théorème : Inégalités de Hanner

Soient $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, \infty)$ et $f, g \in L^p(\mu)$ (réelles ou complexes). Si $1 \leq p \leq 2$ il faut
$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geq \Big| \|f\|_p + \|g\|_p \Big|^p + \Big| \|f\|_p - \|g\|_p \Big|^p \quad ,$$
$$2^p \cdot \Big[\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \Big] \geq \Big| \|f+g\|_p + \|f-g\|_p \Big|^p + \Big| \|f+g\|_p - \|f-g\|_p \Big|^p \quad .$$
Si $2 \leq p < \infty$, les inégalités sont dans l'autre sens.

Preuve : La deuxième inégalité est impliqué par la première en l'appliquer aux $f+g$ et $f-g$. Pour la première inégalité, on va appliquer lemme 1.2.4 à la fonction

$$F(u,v) := \left|u^{\frac{1}{p}} + v^{\frac{1}{p}}\right|^p + \left|u^{\frac{1}{p}} - v^{\frac{1}{p}}\right|^p \quad , \quad u,v \geq 0 \quad ,$$

pour laquelle on va montrer la convexité ou concavité. Évidement F est 1-homogène, continue et pour $1 < p$ la restriction $F(\cdot, 1) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a les dérivatives

$$\partial_1 F(x,1) = x^{\frac{1}{p}-1} \cdot \left[\left|x^{\frac{1}{p}} + 1\right|^{p-1} + \operatorname{sgn}(x-1) \cdot \left|x^{\frac{1}{p}} - 1\right|^{p-1}\right] \quad , \quad x > 0$$

$$\partial_1^2 F(x,1) = \left(1 - \tfrac{1}{p}\right) x^{\frac{1}{p}-2} \left[\left|x^{\frac{1}{p}} - 1\right|^{p-2} - \left|x^{\frac{1}{p}} + 1\right|^{p-2}\right] \quad , \quad x \in (0,1) \cup (1,\infty) \quad .$$

Donc F est par A.1.2 convexe si $1 < p \leq 2$ et concave si $p \geq 2$. Pour $p = 1$ la convexité est évident car $F(u,v) = 2\max\{u,v\}$.
On applique lemme 1.2.4 pour $u := |f|^p$, $v := |g|^p$ et obtient pour le cas $p \leq 2$:

$$\left|\|f\|_p + \|g\|_p\right|^p + \left|\|f\|_p - \|g\|_p\right|^p \leq \int \left|\,|f| + |g|\,\right|^p d\mu + \int \left|\,|f| - |g|\,\right|^p d\mu \overset{A.1.3}{\leq} \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p$$

et pour le cas $p \geq 2$:

$$\left|\|f\|_p + \|g\|_p\right|^p + \left|\|f\|_p - \|g\|_p\right|^p \geq \int \left|\,|f| + |g|\,\right|^p d\mu + \int \left|\,|f| - |g|\,\right|^p d\mu \overset{A.1.3}{\geq} \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \quad .$$

□

Remarque : Pour $p = 2$, les inégalités sont des égalités. En ce cas la première s'appelle **égalité de parallélogramme**.

1.2.6 Théorème : Inégalités de Clarkson

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré, $1 < p < \infty$ et $f, p : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurables. Alors :

1. Pour $2 \leq p$ on a
$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\left[\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right] \quad .$$
2. Pour $1 < p \leq 2$ et son conjugué de Hölder $2 \leq q < \infty$ on a
$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \leq \left[\frac{1}{2}\left[\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right]\right]^{\frac{q}{p}} \quad .$$

1.3 Inclusions des espaces L^p

1.3.1 Théorème : Inclusions des espaces L^p

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré, $1 \leq r \leq s \leq \infty$ et $h : \Omega \to \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mesurable. Alors

1. Si la mesure μ est finie, on a
$$\frac{\|h\|_r}{\sqrt[r]{\mu(\Omega)}} \leq \frac{\|h\|_s}{\sqrt[s]{\mu(\Omega)}}$$
et donc $L^s(\mu) \subseteq L^r(\mu)$.
2. Si il existe un $C > 0$ tel que pour tout $A \in \mathfrak{S}$ on a $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) \geq C$, il faut
$$\frac{\|h\|_s}{\sqrt[s]{C}} \leq \frac{\|h\|_r}{\sqrt[r]{C}}$$
et donc $L^r(\mu) \subseteq L^s(\mu)$.

Preuve :

1. Si $r, s < \infty$, applique l'inégalité de Hölder 1.2.2 à $f := |h|^r$, $g \equiv 1$ et $q := \frac{s}{r}$. Sinon, l'inégalité est évident, où on interprète $\sqrt[\infty]{\mu(\Omega)} := 1$.

2. On considère le cas $r, s < \infty$. Soit $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite croisante de fonctions étagées non-negatives sur Ω tels que $|h| = \lim_{n\to\infty} h_n$ ponctuellement μ-presque partout, avec la représentation

$$h_n = \sum_{i=1}^{N_n} h_{ni} \cdot 1_{A_{ni}} \quad , \quad A_{ni} \in \mathfrak{S} \quad ,$$

où on peut suppose que $\mu(A_{ni}) \geq C \quad \forall\ n, i$. Donc

$$\|f\|_s^s = \int |f|^s \ d\mu = C \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} |h_{ni}|^s \cdot \underbrace{\frac{\mu(A_{ni})}{C}}_{\geq 1} \overset{r\leq s}{\leq} C \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} |h_{ni}|^s \cdot \left[\frac{\mu(A_{ni})}{C}\right]^{\frac{s}{r}}$$

$$= C^{1-\frac{s}{r}} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} \left[\, |h_{ni}|^r \cdot \mu(A_{ni})\right]^{\frac{s}{r}} \overset{r\leq s}{\leq} C^{1-\frac{s}{r}} \lim_{n\to\infty} \Bigg[\underbrace{\sum_{i=1}^{N_n} |h_{ni}|^r \cdot \mu(A_{ni})}_{\int |h_n|^r d\mu}\Bigg]^{\frac{s}{r}}$$

$$= C^{1-\frac{s}{r}} \cdot \|h\|_r^s$$

et par conséquence

$$\frac{\|h\|_s}{\sqrt[s]{C}} \leq \frac{\|h\|_r}{\sqrt[r]{C}} \quad .$$

En cas $r = s = \infty$, l'inégalité est triviale.
En cas $r < s = \infty$, il faut montrer que

$$\|h\|_\infty^r \leq \frac{1}{C} \int |h|^r \, d\mu \quad . \tag{1.3.1.1}$$

Soit $\varepsilon > 0$ n'importante quel et $A_\varepsilon := \{|h|^r \geq \|h\|_\infty^r - \varepsilon\}$. Alors $\mu(A_\varepsilon) > 0$ et donc par supposition $\mu(A_\varepsilon) \geq C$. Par conséquence

$$\frac{1}{C} \int |h|^r \, d\mu \geq \frac{1}{C} \int_{A_\varepsilon} |h|^r \, d\mu \geq (\|h\|_\infty^r - \varepsilon) \cdot \underbrace{\frac{\mu(A_\varepsilon)}{C}}_{\geq 1} \geq \|h\|_\infty^r - \varepsilon$$

et car ε était arbitraire, on trouve exactement (1.3.1.1).

□

1.3.2 Théorème : Inclusions des intersections des L^p

Soient $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mesurable. Alors :

1. Si $1 \leq p \leq r \leq q < \infty$, on a
$$\|f\|_r^r \leq \|f\|_p^p + \|f\|_q^q \quad .$$

2. Si $1 \leq p \leq r < q = \infty$, on a
$$\|f\|_r \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{r}} \cdot \|f\|_p^{\frac{p}{r}} \quad .$$

En tout cas $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$, on trouve

$$\boxed{L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subseteq L^r(\mu) \quad .}$$

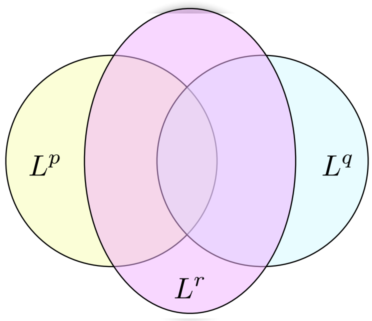

FIGURE 1: Sur les inclusions des intersections des espaces L^p.

Preuve :

1. Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite croisante de fonctions étagées non-negatives, tels que $|f| = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ponctuellement, de la forme

$$f_n = \sum_{i=1}^{N_n} f_{ni} \cdot 1_{A_{ni}} \quad ,$$

où $f_{ni} \geq 0$, $A_{ni} \in \mathfrak{S}$. Alors

$$\|f\|_r^r = \int |f|^r \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} |f_{ni}|^r \, \mu(A_{ni}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ |f_{ni}|<1}}^{N_n} \underbrace{|f_{ni}|^r}_{\leq |f_{ni}|^p} \mu(A_{ni}) + \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ |f_{ni}|\geq 1}}^{N_n} \underbrace{|f_{ni}|^r}_{\leq |f_{ni}|^q} \mu(A_{ni})$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ |f_{ni}|<1}}^{N_n} |f_{ni}|^p \, \mu(A_{ni}) + \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ |f_{ni}|\geq 1}}^{N_n} |f_{ni}|^q \, \mu(A_{ni}) \leq \|f\|_p^p + \|f\|_q^q \quad .$$

2. Parce que $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-presque partout, on a

$$\|f\|_r^r = \int |f|^{r-p} \cdot |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\infty^{r-p} \cdot \int |f|^p \, d\mu = \|f\|_\infty^{r-p} \cdot \|f\|_p^p \quad .$$

□

1.3.3 Théorème : Comportement de $\|f\|_p$ pour $p \to \infty$

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré σ-finie, $p_0 \in [1, \infty)$ et $f \in L^{p_0}(\mu)$. Alors

$$\|f\|_p \stackrel{p\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty \quad . \tag{1.3.3.1}$$

1.4 L'espace dual de L^p

1.4.1 Théorème : Fonctions comme applications linéaires

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugués de Hölder. Alors toute fonction $g \in L^q(\mu)$ induit une forme linéaire bornée $\mathcal{T}_g$ sur $L^p(\mu)$ par

$$\mathcal{T}_g : L^p(\mu) \to \mathbb{C} \quad , \quad \mathcal{T}_g : f \mapsto \int_\Omega g \cdot f \, d\mu \quad , \quad f \in L^p(\mu) \quad .$$

L'application

$$\mathcal{T} : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))' \quad , \quad g \mapsto \mathcal{T}_g$$

est lui même linéaire et bornée avec $\|\mathcal{T}\| \leq 1$, c'est-à-dire une **contraction**. Si μ est σ-finie ou $1 < p \leq \infty$, alors $\mathcal{T}_g$ a la norme $\|\mathcal{T}_g\|_{(L^p)'} = \|g\|_q$ et l'application linéaire $\mathcal{T} : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))'$ est une isométrie.

Preuve : Soit $g \in L^q(\mu)$. Par Hölder 1.2.2 pour $f \in L^p(\mu),\ g \in L^q(\mu)$ on a

$$\int |gf| \ d\mu \leq \|g\|_q \cdot \|f\|_p < \infty \quad ,$$

ce qui implique que l'intégral $\int g^* f \ d\mu$ existe dans $\mathbb{C}$. Donc $\mathcal{T}_g : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$ est bien défini, linéaire et avec norme $\|\mathcal{T}_g\| \leq \|g\|_q$. En particulier $\mathcal{T} : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))'$ est bornée avec $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{L}(L^q,(L^p)')} \leq 1$.

On va montrer que $\|\mathcal{T}_g\| \geq \|g\|_q$. On suppose $\|g\|_q > 0$, sinon l'affirmation est triviale.

- Cas $1 < p < \infty$: La fonction $f_0 := |g|^{q-2} g^*$ satisfait $\|f_0\|_p^p = \|g\|_q^q$ et en particulier $f_0 \in L^p(\mu)$. D'autre, on a

$$\mathcal{T}_g f_0 = \int g \cdot f_0 \ d\mu = \int |g|^q \ d\mu = \|g\|_q^q = \|f_0\|_p \cdot \|g\|_q$$

  et $\|f_0\|_p \neq 0$, donc $\|\mathcal{T}_g\| \geq \|g\|_q$.
- Cas $p = \infty$: Poser $f_0 := g^* \cdot |g|^{-1}$ avec la convention $f_0(x) = 1$ où $g(x) = 0$. Alors $\|f_0\|_\infty = 1$ et $\mathcal{T}_g f_0 = \|g\|_1$. Ça montre que $\|\mathcal{T}_g\| \geq \|q\|_1$.
- Cas $p = 1$ et μ σ-finie : Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{S}$ une suite des parties croisante telle que $\mu(\Omega_n) < \infty$ et $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$. Soit $0 < \varepsilon < \|g\|_\infty$ et

$$A_\varepsilon := \{|g| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon\} \quad ,$$

  alors

$$0 < \mu(A_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A_\varepsilon \cap \Omega_n)}_{<\infty} \quad .$$

  Donc, pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand on obtient

$$0 < \mu(\underbrace{A_\varepsilon \cap \Omega_n}_{=:B_\varepsilon}) < \infty$$

  Soit $f_\varepsilon := g^* \cdot |g|^{-1} \cdot 1_{B_\varepsilon}$, alors $\|f_\varepsilon\|_1 = \mu(B_\varepsilon)$ et $gf_\varepsilon = 1_{B_\varepsilon} \cdot |g| \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon) \cdot 1_{B_\varepsilon}$. Par conséquence

$$\mathcal{T}_g f_\varepsilon = \int g f_\varepsilon \ d\mu \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon) \cdot \mu(B_\varepsilon) = (\|g\|_\infty - \varepsilon) \cdot \|f_\varepsilon\|_1$$

  et $\|f_\varepsilon\| \neq 0$, donc $\|\mathcal{T}_g\| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$. Car $\varepsilon > 0$ était arbitraire, ça preuve l'affirmation.

□

1.4.2 Théorème : L'espace dual de L^p

Soit $1 \leq p < \infty$ et $1 < q \leq \infty$ son conjugué de Hölder. Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré (σ-fini si $p = 1$). Alors l'isométrie $\mathcal{T} : L^q(\mu) \to L^p(\mu)'$ définie dans théorème 1.4.1 est surjective et donc un isomorphisme. Autrement dit, pour toute forme linéaire continue $a : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$, il existe un unique $g \in L^q(\mu)$ tel que

$$a(f) = \int_\Omega g \cdot f \ d\mu \qquad \forall \ f \in L^p(\mu) \quad .$$

Remarques

1. Pour $p = q = 2$ on retrouve le théorème de Fréchet-Riesz pour l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$.
2. Par théorème 1.4.1, l'espace $L^1(\mu)$ est isométriquement plongé dans le dual de $L^\infty(\mu)$. Cependant, même si l'espace dual de $L^1(\mu)$ est isomorphe à $L^\infty(\mu)$, le réciproque n'est pas vrai. En fait, souvent l'espace dual $L^\infty(\mu)'$ est *plus grand* que $L^1(\mu)$. Voir 2.2.19 pour un exemple.

1.4.3 Théorème de Banach-Steinhaus pour les espaces L^p

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$ et $1 < q \leq \infty$ conjugues de Hölder et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\mu)$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\mathcal{T}_g f_n| < \infty$ pour tout $g \in L^q(\mu)$. Alors, la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\mu)$.

Preuve : Supposons que le théorème est faux. Alors, on peut trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\mu)$ telle que $\|f_n\|_p \geq 4^n$ $\forall n$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\mathcal{T}_g f_n| < \infty$ pour tout $g \in L^q(\mu)$. Sans perdu de généralité, on peut supposer [2] que $\|f_n\|_p = 4^n$. On va construire une fonction $g \in L^q(\mu)$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\mathcal{T}_g f_n| = \infty$.
On pose

$$g_n := f_n^* \cdot \frac{|f_n|^{p-2}}{\|f_n\|_p^{p-1}} \cdot 1_{\{f_n \neq 0\}}$$

et note que $g_n \in L^q(\mu)$ avec norme $\|g_n\|_q = 1$. On pose $\sigma_1 := 1$ et construit une suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, en choisissant σ_n tel que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} 3^{-k}\sigma_k \int g_k f_k \; d\mu\right| \geq \left|3^{-n}\sigma_n \cdot \int g_n f_n \; d\mu\right| = 3^{-n} \|f_n\|_p \quad . \tag{1.4.3.1}$$

Noter que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|3^{-k}\sigma_k g_k\right\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} < \infty$$

et donc par théorème 1.5.2 on trouve que

$$g := \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\sigma_k g_k \;\; \in L^q(\mu) \quad .$$

Si $f \in L^p(\mu)$ est n'importante quelle, alors les sommes partiales $G_n := \sum_{k=1}^{n} 3^{-k}\sigma_k g_k f$ sont majorés par la mesurable $G := \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} |g_k f|$, c'est-à-dire $|G_n| \leq G \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. En fait, G est intégrable, car par le théorème de convergence monotone il faut

$$\int G \; d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \int |g_k f| \;\; d\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \underbrace{\|g_k\|_q}_{1} \cdot \|f\|_p < \infty \quad .$$

Donc par Lebesgue on a

$$\mathcal{T}_g f = \int gf \; d\mu = \sum_{k=1}^{n} 3^{-k}\sigma_k \int g_k f \; d\mu$$

et en particulier

$$|\mathcal{T}_g f_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\sigma_k \int g_k f_n \; d\mu\right| \geq \left|\sum_{k=1}^{n} 3^{-k}\sigma_k \int g_k f_k \; d\mu\right| - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|3^{-k}\sigma_k \int g_k f_n \; d\mu\right|$$

$$\overset{(1.4.3.1)}{\geq} 3^{-n} \|f_n\|_p - \sum_{k=n+1}^{\infty} 3^{-k} \|g_k\|_q \cdot \|f_n\|_p \geq \left(\frac{4}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad .$$

Cela est une contradiction aux suppositions.

□

Remarque sur la preuve : Si on suppose $1 < p$ ou μ σ-fini, alors par théorème 1.4.2 on peut regarder $L^q(\mu)$ comme l'espace dual de $L^p(\mu)$ et trouver par la version générale de Banach-Steinhaus 2.3.7 immédiatement l'affirmation. La preuve ci-dessus reste correcte même pour le cas $p = 1$ et μ arbitraire.

2. Sinon, les $\tilde{f}_n := \frac{4^n}{\|f_n\|_p} \cdot f_n$ convient.

1.5 La topologie de $\|\cdot\|_p$

1.5.1 Lemme sur la continuité de la norme

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p \leq \infty$. Soit $0 \leq f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$ une suite croisante de fonctions non-negatives, ponctuellement convergente vers f μ-presque partout. Alors $\|f_n\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_p$.

Preuve : Le cas $1 \leq p < \infty$ est simplement un cas spécial du théorème de convergence monotone de Beppo-Levi. Considérons donc le cas $p = \infty$. Alors, comme $0 \leq f_n \leq f$, on a $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad . \tag{1.5.1.1}$$

D'autre part, supposer que (1.5.1.1) n'est pas une égalité, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty - 2\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ,$$

ce qui implique $|f_n| \leq \|f\|_\infty - 2\varepsilon$ μ-presque partout, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, l'ensemble $\{|f| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ possède mesure non-nulle. Mais cela implique que f_n ne converge pas vers f su un ensemble de mesure non-nulle, une contradiction !

□

1.5.2 Théorème : Convergence normalement dans L^p

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p \leq \infty$. Soit $(f_k)_{k=1}^\infty \subseteq L^p(\mu)$ une suite telle que la série $\sum_{k=1}^\infty f_k$ converge **normalement** dans $L^p(\mu)$, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_p < \infty \quad . \tag{1.5.2.1}$$

Alors la série $\sum_{k=1}^n f_k$ converge dans $\mathbb{C}$ ponctuellement μ-presque partout et dans $\left(L^p(\mu), \|\cdot\|_p\right)$.

Preuve : Considérons le cas $1 \leq p < \infty$ et étudions la convergence des fonctions

$$S_n := \sum_{k=1}^n |f_k| \quad .$$

La suite $(S_n)_{n=1}^\infty$ est une suite croisante de fonctions positives, mesurables et donc d'après le théorème de Beppo-Lévi

$$\int \left[\sum_{k=1}^\infty |f_k|\right]^p d\mu \overset{\text{B.L.}}{=} \lim_{n\to\infty} \int S_n^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^n |f_k|\right\|_p^p \leq \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p\right]^p \overset{(1.5.2.1)}{<} \infty \quad .$$

On conclut par ça que $\sum_{k=1}^\infty |f_k|$ est fini μ-presque partout et donc $\sum_{k=1}^\infty f_k$ converge ponctuellement dans $\mathbb{C}$ μ-presque partout. D'autre part, on a

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty f_k - \sum_{k=1}^n f_k\right\|_p^p = \left\|\sum_{k=n+1}^\infty f_k\right\|_p^p \overset{1.2.3}{\leq} \left[\sum_{k=n+1}^\infty \|f_k\|_p\right]^p \underset{(1.5.2.1)}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0 \quad ,$$

ce qui preuve le théorème pour $p < \infty$.
En cas $p = \infty$, on a de même

$$\sum_{k=1}^\infty |f_k| \leq \sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_\infty < \infty \tag{1.5.2.2}$$

μ-presque partout. Par conséquence $\sum_{k=1}^\infty f_k$ converge ponctuellement dans $\mathbb{C}$ μ-presque partout et de la même façon comme (1.5.2.2), on trouve que $\sum_{k=1}^n f_k \underset{\|\cdot\|_\infty}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \sum_{k=1}^\infty f_k$. Ça termine la preuve.

□

1.5.3 Théorème : La complétude des L^p

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré. Alors, pour tout $p \in [1, \infty]$ l'espace $L^p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ est un espace de Banach par rapport à la norme $\|\cdot\|_p$.

Preuve : Par théorème 1.5.2 tout suite normalement convergente dans $L^p(\mu)$ est en fait convergente dans $L^p(\mu)$. D'après théorème 2.4.5 il faut que $L^p(\mu)$ est complet.

Preuve élémentaire : Le cas $p = \infty$ correspond au cas de la convergence uniforme, que l'on connaît très bien. On suppose donc $1 \leq p < \infty$. Soit $(f_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq L^p(\mu)$ une suite de Cauchy. Alors il existe une sous-suite $(f_{k_n})_{n=1}^{\infty} \subseteq (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\|f_{k_m} - f_{k_n}\|_p \leq 2^{-n} \quad \forall\, m \geq n \quad . \tag{1.5.3.1}$$

On pose $g_n := f_{k_n}$ et trouve que

$$\int \left[\sum_{n=1}^{\infty} |g_{n+1} - g_n|\right]^p d\mu = \int \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{N} |g_{n+1} - g_n|\right]^p d\mu \overset{\text{convergence monotone}}{=} \lim_{N\to\infty} \int \left[\sum_{n=1}^{N} |g_{n+1} - g_n|\right]^p d\mu$$

$$\overset{1.2.3}{\leq} \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{N} \|g_{n+1} - g_n\|_p\right]^p \overset{(1.5.3.1)}{<} \infty \quad .$$

Donc $\sum_{n=1}^{\infty} |g_{n+1} - g_n| < \infty$ μ-presque partout et $\sum_{n=1}^{\infty}(g_{n+1} - g_n)$ converge ponctuellement μ-presque partout. Alors la fonction

$$h := g_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(g_{n+1} - g_n) = \lim_{n\to\infty} g_n$$

est bien définie μ-presque partout. Donc elle peut être prolongé à une fonction mesurable, tandis que $g_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} h$ ponctuellement μ-presque partout. Après Fatou on a

$$\int |h|^p \, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} |g_n|^p \, d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int |g_n|^p \, d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_p^p \overset{\substack{(g_n)\\ \text{Cauchy}}}{<} \infty$$

et donc $h \in L^p(\mu)$. De plus

$$\int |h - g_n|^p \, d\mu = \int \liminf_{m\to\infty} |g_m - g_n|^p \, d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{m\to\infty} \underbrace{\int |g_m - g_n|^p \, d\mu}_{\|g_m - g_n\|_p^p} \overset{(1.5.3.1)}{\leq} 2^{-np} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ça veut dire $g_n \underset{\|\cdot\|_p}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} h$. Parce que (f_n) est Cauchy, il faut aussi $f_n \underset{\|\cdot\|_p}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} h$.

□

Conséquence : L'espace $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \int_{\Omega} f^* \cdot g \, d\mu \quad , \quad f, g \in L^2(\mu) \quad .$$

1.5.4 Lemme sur la convergence dans L^p

Soient $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré, $1 \leq p \leq \infty$, $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L^p(\mu)$ une suite de fonctions et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurable. Alors, les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. La suite (f_n) est Cauchy dans $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ et possède une sous-suite (f_{n_k}) telle que $f_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ ponctuellement μ-presque partout.
2. La suite (f_n) converge dans $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ vers $f \in L^p(\mu)$.

Preuve :

1 $\Rightarrow$ 2 **:** Considérons le cas $1 \leq p < \infty$. Car (f_{n_k}) est Cauchy, elle a une sous-suite $(f_{m_k})_{k=1}^{\infty} \subseteq (f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ telle que $\|f_{m_l} - f_{m_k}\|_p \leq 2^{-k}$ pour $l \geq k$. Sans perde de généralité, on peut suppose que cette sous-suite est exactement $(f_{n_k})_k$. Alors, on a

$$\|f - f_{n_k}\|_p^p = \int \liminf_{l\to\infty} |f_{n_l} - f_{n_k}|^p \; d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{l\to\infty} \underbrace{\int |f_{n_l} - f_{n_k}|^p \, d\mu}_{\|f_{n_l}-f_{n_k}\|_p^p} \leq 2^{-kp} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ,$$

donc $f_{n_k} \underset{\|\cdot\|_p}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} f$. Parce que (f_n) est Cauchy, il faut $f_n \underset{\|\cdot\|_p}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f$.

Considérons le cas $p = \infty$. Car $(f_n)_n$ est Cauchy, il y a un $M > 0$ tel que $\|f_n\|_\infty \leq M \ \forall\ n$ et donc $A_n \in \mathfrak{S}$ tels que $\mu(A_n) = 0$ et $\left|f_n\big|_{A_n^c}\right| \leq M \ \forall\ n$. Si on pose $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ on trouve que $\mu(A) = 0$ et $\left|f_n\big|_{A^c}\right| \leq M \ \forall\ n$. D'après la convergence ponctuelle de f_{n_k} vers f μ-presque partout, on conclure $f \in L^\infty(\mu)$.

On va preuve la convergence uniforme vers f par l'absurde. Supposons que f_{n_k} ne va pas vers f uniformément. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ et une sous suite $(f_{m_l})_l \subseteq (f_{m_k})_k$ telle que

$$\|f_{m_l} - f\|_\infty > \varepsilon \quad \forall\ l \in \mathbb{N} \quad . \tag{1.5.4.1}$$

Sans perdu de généralité, on peut suppose que cette sous-suite est exactement $(f_{n_k})_k$. Car (f_{n_k}) est Cauchy, il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_{n_k} - f_{n_l}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\ k, l \geq k_0 \quad . \tag{1.5.4.2}$$

D'après (1.5.4.1) il existe un ensemble $A \in \mathfrak{S}$ tel que $\mu(A) > 0$ et

$$\left|f_{n_{k_0}} - f\right|\big|_A > \varepsilon \quad .$$

ou d'après (1.5.4.2)

$$|f_{n_l} - f|\big|_A > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\ l \geq k_0 \quad .$$

Alors $|f_{n_l}(x) - f(x)| \overset{l\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ pour tout $x \in A$, une contradiction à la convergence ponctuelle μ-presque partout.

2 $\Rightarrow$ 1 **:** Considérons le cas $p < \infty$. Parce que (f_n) est Cauchy, par la preuve du théorème 1.5.3 elle possède une sous-suite (f_{n_k}) qui converge à une fonction $h \in L^p(\mu)$ ponctuellement μ-presque partout et $f_n \underset{\|\cdot\|_p}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} h$.

Par unicité du limite, on déduit que $h = f$ μ-presque partout et donc $f_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ ponctuellement μ-presque partout.

En cas $p = \infty$, c'est à dire $\|f_n - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\mu\big(\underbrace{\{|f_n - f| > \|f_n - f\|_\infty\}}_{=:A_n}\big) = 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad .$$

L'union $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ est aussi de mesure nul et pour tout $x \in A^c$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ,$$

donc $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ ponctuellement μ-presque partout.

□

1.5.5 Lemme : Une condition suffisante pour la convergence dans L_p

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $0 < p < \infty$. Soient $(f_n)_n \subseteq L^p(\mu)$ et $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable. Supposer que $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ μ-presque partout et que $\sup_n \|f_n\|_{L^p(\mu)} < \infty$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p\|_{L^1(\mu)} = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} [\|f_n\|_{L^p}^p - \|f_n - f\|_{L^p}^p] = \|f\|_{L^p}^p .$$

Si de plus $\|f_n\|_{L^p} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^p}$, alors $\|f_n - f\|_{L^p(\mu)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Preuve : Voir [5, Proposition 4.7.30].

1.5.6 Lemme sur convexes fermés de L^p

Soient $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, $1 < p < \infty$ et $\emptyset \neq C \subseteq L^p(\mu)$ une convexe fermée. Alors, pour tout $f \in L^p(\mu)$, il existe une unique fonction $h \in C$ telle que

$$\|h - f\|_p = d(C, f) := \inf_{g\in C} \|g - f\|_p \quad .$$

1.5.7 Definition: Fonction étagée

Soit $(\Omega, \mathfrak{S})$ un espace mesurable et $f : \Omega \to \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ une fonction mesurable. On appelle f une fonction **étagée** si son image est finie. On note $\mathscr{S}(\mathfrak{S}, \mathbb{K})$ l'espace linéaire des fonctions étagées sur $(\Omega, \mathfrak{S})$ dans $\mathbb{K}$.

Remarque : Soit μ une mesure sur $(\Omega, \mathfrak{S})$ et $1 \leq p < \infty$ n'importante quel. Alors $f \in \mathscr{S}(\mathfrak{S}, \mathbb{K})$ est intégrable ssi $f \in L^p(\mu)$.

1.5.8 Théorème : Densité des fonctions étagées

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Alors, les fonctions étagées intégrables sont denses dans $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$.

Preuve : Se rappeler que les fonctions étagées intégrables sont exactement ceux dans $L^p(\mu)$. Soit $f \in L^p(\mu)$. On se ramène au cas $f \geq 0$ en écrivant $f = f^+ - f^-$. Alors il existe une suite croisante de fonctions étagées $(f_n) \subseteq \mathscr{S}(\mathfrak{S}, \mathbb{K})$ telle que $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ ponctuellement et $0 \leq f_n \leq f \;\; \forall\, n$. Par majoration on a $f_n \in L^p(\mu) \;\; \forall\, n$. De plus, par le théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int |f - f_n|^p \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} |f - f_n|^p \, d\mu = 0$$

car $|f - f_n|^p \leq |f|^p \in L^1(\mu)$.

□

1.5.9 Corollaire : Densité des espaces L^p entre eux

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p, q < \infty$ tels que $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$. Alors, $L^p(\mu)$ est dense dans $(L^q(\mu), \|\cdot\|_q)$.

Preuve : On sait que L^p contient les fonctions étagées intégrables. Par théorème 1.5.8 résulte l'affirmation.

□

Remarques :

(i) De même, on montre que si $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ avec $r < \infty$, alors $L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ est dense dans $L^r(\mu)$ (voir aussi théorème 1.3.2).

(ii) L'affirmation est faut pour le cas $1 \leq p < q = \infty$. Comme exemple, regardons l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$ avec la mesure de comptage μ. Par 1.3.1 on a $L^1(\mu) \subseteq L^\infty(\mu)$, mais il n'y a pas de fonctions $f_n \in L^1(\mu)$ qui convergent vers la fonction bornée $f(x) \equiv 1 \in L^\infty(\mu)$ par rapport à $\|\cdot\|_\infty$.

1.5.10 Théorème : Densité des fonctions Lipschitziens

Soit X un espace métrique localement compact, $\mathscr{B}(X)$ sa σ-algèbre Borelienne et μ une mesure de Radon (voir A.3.5) sur $(X, \mathscr{B}(X))$. Soit $1 \leq p < \infty$. Alors :

1. Les fonctions Lipschitziens $f : X \to \mathbb{K}$ à support compact, sont dense dans L^p.
2. Les fonctions continues $f : X \to \mathbb{K}$ à support compact, sont dense dans $L^p(\mu)$.

Preuve : Affirmation (2) est impliquée par (1). Soit $\mathscr{L}_c(X)$ l'espace linéaire des fonctions lipschitziennes $X \to \mathbb{K}$ de support compact. Par 1.5.8 il suffit d'approximer les fonctions étagées par $\mathscr{L}_c(X)$. Par linéarité de $\mathscr{L}_c(X)$ il suffit d'approximer les fonctions indicatrices. Comme μ est de Radon et en particulier intérieurement régulière, il suffit d'approximer les indicatrices des parties compactes.

Soit $K \subseteq X$ compact et $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme μ est localement finie et X localement compact, il existe un recouvrement de K par des ouverts relativement compacts qui sont de mesure finie. Comme K est compact, on peut supposer que ce recouvrement comprit un nombre fini de ce ouverts. Bilan : Il existe un ouvert $\Omega \subseteq X$ tel que :

- Ω est de mesure finie,
- $K \subseteq \Omega$,
- Ω est relativement compact et en particulier de diamètre fini.

La restriction de μ sur $\mathscr{B}(X) \cap \Omega = \mathscr{B}(\Omega)$ est une mesure finie, donc comme on sait extérieurement régulier. Autrement dit, il existe un ouvert $K \subseteq U \subseteq \Omega$ tel que $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$. La fonction $f := \delta/\sigma : X \to \mathbb{R}_+$, avec

$$\delta(x) := d(U^c, x) \quad , \quad \sigma(x) := d(U^c, x) + d(K, x)$$

est bien définie car U^c et K sont fermés disjoints et donc $\sigma > 0$.

Proposition : $f : X \to \mathbb{R}_+$ est Lipschitzienne.

> **Preuve :** Comme K est compact, on sait que $d(U^c, K) > 0$. Il existe donc une constante $\alpha > 0$ telle que $0 < \alpha \leq \sigma(x)$. On sait que $d(K, \cdot)$ et $d(U^c, \cdot)$ sont Lipschitziennes, donc $\sigma : X \to \mathbb{R}_+$ est Lipschitzienne.
>
> La fonction $\delta = d(U^c, \cdot)$ est Lipschitzienne. Comme Ω est de diamètre fini, δ est bornée sur Ω et donc sur U. Comme elle est bornée sur U^c, elle est bornée sur tout X.
>
> Donc, par lemme A.3.2(2) la fraction $\frac{\delta}{\sigma}$ est Lipschitzienne.

Évidement, f est 1 sur K, 0 sur U^c et toujours $0 \leq f \leq 1$. Donc

$$\int_X |1_K - f| \ d\mu = \int_K \underbrace{|1_K - f|}_{0} + \int_{U \setminus K} \underbrace{|1_K - f|}_{|f| \leq 1} \ d\mu + \int_{U^c} \underbrace{|1_K - f|}_{0} \ d\mu \leq \mu(U \setminus K) \leq \varepsilon \quad .$$

Comme f est de support compact, cela complète la preuve.

□

1.5.11 Théorème : Densité de $\mathcal{C}^\infty$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \cap L^p(\lambda)$ est dense dans $L^p(\lambda)$.

1.5.12 Théorème : Separabilité des espaces L^p

Il existe une famille dénombrable $\mathcal{F} := \{\Phi_i\}_{i=1}^\infty$ de fonctions $\Phi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mesurables telle que $\forall\ 1 \leq p < \infty$ une sous-partie de $\mathcal{F}$ est contenu et dense dans $L^p(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$.

Preuve : Soit $j \in \mathbb{N}$ et Δ_j l'ensemble des cubes dyadiques de $\mathbb{R}^n$ de longueur de côté 2^{-j}, de la forme

$$Q = \prod_{i=1}^n \left[m_i \cdot 2^{-j},\ (m_i + 1) \cdot 2^{-j}\right) \quad , \quad m_i \in \mathbb{Z} \quad .$$

Alors :

- Tout famille Δ_j forme une partition de $\mathbb{R}^n$.
- L'union $\Delta := \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j$ est dénombrable.
- Si $Q \in \Delta_j$ et $P \in \Delta_k$ avec $j \leq k$, alors $Q \cap P = \emptyset$ ou $P \subseteq Q$.

Soit $\mathcal{F}_j$ l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$\Phi_j = \sum_{Q \in \Delta_j} C_Q \cdot 1_Q$$

où $C_Q \in \mathbb{Q}$. Soit $f \in L^p(\lambda^n)$ et $\varepsilon > 0$, alors d'après 1.5.10 il existe une fonction continue $\tilde{f} \in L^p(\lambda^n)$ à support compact telle que $\|f - \tilde{f}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. On suppose que le support de $\tilde{f}$ est contenu dans $C := \left[-2^J, 2^J\right)^n$ pour quelqu'un $J \in \mathbb{N}$. On définit

$$\tilde{f}_j(x) := \begin{cases} 0 & : x \notin C \\ \frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q \tilde{f}(t)\ dt & : x \in Q \in \Delta_j \wedge x \in C \end{cases} \tag{1.5.12.1}$$

Car $\tilde{f}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$, on peut choisir un $\delta > 0$ tel que

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \delta \quad \Rightarrow \left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\right| \cdot \sqrt[p]{\lambda(C)} \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.5.12.2}$$

et un $j \in \mathbb{N}$ tel que $\delta \geq 2^{-j}\sqrt{n}$. Alors pour $x \in Q \in \Delta_j$ il faut

$$\left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\right| \cdot \sqrt[p]{\lambda(C)} \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad . \tag{1.5.12.3}$$

Donc, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}_j(x)\right|^p dx = \sum_{\substack{Q \in \Delta_j \\ Q \cap C \neq \emptyset}} \int_Q \left|\tilde{f}(x) - f_j(x)\right|\ dx = \sum_{\substack{Q \in \Delta_j \\ Q \cap C \neq \emptyset}} \int_Q \left|\tilde{f}(x) - \frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q \tilde{f}(y)\ dy\right|^p dx$$

$$= \sum_{\substack{Q \in \Delta_j \\ Q \cap C \neq \emptyset}} \int_Q \left|\frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q \left[\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\right]\ dy\right|^p dx \qquad \Bigg| \qquad \frac{dy}{\lambda(Q)} : \text{probabilité dans } Q$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\leq} \sum_{\substack{Q \in \Delta_j \\ Q \cap C \neq \emptyset}} \int_Q \int_Q \left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\right|^p \frac{dy\ dx}{\lambda(Q)} \overset{(1.5.12.3)}{\leq} \left[\frac{\varepsilon}{3}\right]^p$$

et donc $\left\|\tilde{f} - \tilde{f}_j\right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Finalement, on se rappelle que $\tilde{f}_j$ ne prend pas nécessairement des valeurs dans $\mathbb{Q}$. On choisit des constantes $C_Q \in \mathbb{Q}$ telles que

$$\left|\tilde{f}_j\big|_Q - C_Q\right| \cdot \sqrt[p]{2^{-nj} N} \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\ Q \in \Delta_j,\ Q \cap C \neq \emptyset \tag{1.5.12.4}$$

où $N := |\{Q \in \Delta_j : Q \cap C \neq \emptyset\}|$ et pose

$$\Phi_j(x) := \begin{cases} 0 & : x \notin C \\ C_Q & : x \in Q \in \Delta_j \wedge x \in C \end{cases} .$$

Alors

$$\|\tilde{f}_j - \Phi_j\|_p^p \leq \left[\frac{\varepsilon}{3}\right]^p$$

et donc

$$\left\|f - \Phi_j\right\|_p \leq \left\|f - \tilde{f}\right\|_p + \left\|\tilde{f} - \tilde{f}_j\right\|_p + \left\|\tilde{f}_j - \Phi_j\right\|_p \leq \varepsilon \quad .$$

On a trouver donc une $\Phi_j \in \mathcal{F}_j \cap L^p(\lambda^n)$ telle que $\|f - \Phi_j\|_p \leq \varepsilon$. Car les ensembles $\mathcal{F}_j$ sont dénombrables, aussi est $\mathcal{F} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j$.

□

1.6 Convolution

1.6.1 Definition: Convolution

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mesurables tels que l'intégral

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot g(x-y) \; dy$$

existe pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors, on appelle la fonction $(f * g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la **convolution** de f et g.

Remarques :

1. Si $p, q \in [1, \infty]$ sont conjugues de Hölder et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, la convolution $f * g$ est partout bien définie par l'inégalité de Hölder

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y) \cdot g(x-y)| \; dy \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \cdot \|g(x - \cdot)\|_q = \|f\|_p \cdot \|g\|_q < \infty \quad .$$

2. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. En regardant l'intégral

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x-y)| \; dx \right] \; dy = \int |f(y)| \int |g(x-y)| \; dx \; dy \overset{\text{Tornelli}}{=} \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty \quad .$$

on trouve que $f * g$ est définie presque-partout et dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ avec norme $\|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. En particulier, l'opération bilinéaire

$$L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n) \quad , \quad (f, g) \mapsto f * g$$

est continue.

3. Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sont mesurables tels que $(f * g)$ existe partout, alors

$$\{(f * g) \neq 0\} \subseteq \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\} \quad .$$

En particulier, si f, g sont de support compact, alors $f * g$ est également avec support

$$\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g) \quad .$$

4. Soient $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de support compact. Alors, $f * g$ existe partout et est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
Preuve : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) g(y)| \; dy \leq \underbrace{\|g\|_\infty}_{<\infty} \cdot \underbrace{\int\limits_{\operatorname{supp}(g)} |f(x-y)| \; dy}_{<\infty} < \infty \quad ,$$

donc, $(f * g)$ est bien définie. Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ une compacte contenant $\operatorname{supp}(g)$ et $H \subseteq \mathbb{R}^n$ une compacte n'importante quelle. Alors

$$\int\limits_H |(f * g)(x)| \; dx = \int\limits_H \int\limits_K |g(y) f(x-y)| \; dy \; dx \overset{\text{Tornelli}}{=} \int\limits_K dy \; |g(y)| \underbrace{\int\limits_H dx \; |f(x-y)|}_{\int\limits_{H-y} |f(z)| \; dz}$$

$$\leq \underbrace{\int\limits_K dy \; |g(y)|}_{<\infty} \cdot \underbrace{\int\limits_{H-K} |f(z)| \; dz}_{<\infty} < \infty \quad ,$$

c'est-à-dire $f * g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

5. La convolution $*: L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n)$ est associative. Pour $f_1, .., f_n \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a

$$(f_1 * .. * f_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dy_1\ f_1(y_1) \int_{\mathbb{R}^n} dy_2\ f_2(y_2) \ldots \int_{\mathbb{R}^n} dy_{n-1}\ f_{n-1}(y_{n-1}) \cdot f_n(x - y_1 - .. - y_{n-1})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} dy_1\ f_1(x - y_1) \int_{\mathbb{R}^n} dy_2\ f_2(y_1 - y_2) \ldots \int_{\mathbb{R}^n} dy_{n-1}\ f_{n-1}(y_{n-2} - y_{n-1}) \cdot f_n(y_{n-1}) \quad .$$

1.6.2 Théorème : Dérivation de la convolution

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mesurables tels que $f * g$ existe partout, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et g Lipschitzienne[3] (ou $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ à dérivée borné). Alors $f * g$ est Gâteaux-dérivable partout et possède les derivations

$$\partial_i(f * g) = f * (\partial_i g) \quad .$$

Preuve : On se rappelle que pour $x \in \mathbb{R}^n$ on a la représentation

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot g(x - y)\ dy \quad .$$

Admettons qu'on peut dériver sous le signe somme. On obtient

$$\partial_i(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x^i} [f(y) \cdot g(x - y)]\ dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \partial_i g(x - y)\ dy \quad ,$$

c'est-à-dire $\partial_i(f * g) = f * \partial_i g$. Noter que la dérivation sous le signe somme est légitime car pour $h \in \mathbb{R}^n$

$$\left| f(y) \cdot \tfrac{1}{\|h\|} [g(x + h - y) - g(x - y)] \right| = |f(y)| \cdot \tfrac{1}{\|h\|} \left| g(x + h - y) - g(x - y) \right| \leq |f(y)| \cdot \underbrace{\left\| \partial_i g \right\|_\infty}_{\substack{<\infty \\ \text{par supposition}}}$$

est une majoration par une fonction intégrable de y qui ne dépend pas de h.

$\square$

Conséquences :

(i) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est lisse avec dérivées bornées, alors $f * g$ est lisse et possède les dérivations $\partial_i(f * g) = f * (\partial_i g)$ où $i \in \mathbb{N}_0^n$ est un multi-indice n'importante quel.

(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est lisse à support compact, alors $f * g$ est lisse et possède les dérivations $\partial_i(f * g) = f * (\partial_i g)$.

1.6.3 Lemme : Continuité des translations dans $L^p(\mathbb{R}^n)$

Soit $1 \leq p < \infty$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n$ pose $\tau_h f : x \mapsto f(x - h)$. Alors

$$\|\tau_h f - f\|_p \overset{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

3. Se rappeller que toute $\varkappa$-Lipschitzienne $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (où $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est ouvert) est Fréchet-dérivable presque partout [Rademacher]. Quand la dérivée $f'(x)$ existe, on a $\|f'(x)\| \leq \varkappa$.

Preuve : Évidement, pour $h \in \mathbb{R}^n$ l'opérateur $\tau_h : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ est linéaire et une isométrie par rapport à $\|\cdot\|_p$. Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ continue de support compact. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|\tau_h f - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |(\tau_h f)(x) - f(x)|^p \ dx \quad .$$

Car f est continue, $\tau_h f \overset{h\to 0}{\longrightarrow} f$ ponctuellement. Choisissons une compacte $K \subseteq \mathbb{R}^n$ telle que

$$\bigcup_{x \in \mathrm{supp}(f)} B_1(x) \subseteq K \quad .$$

Alors

$$|\tau_h f - f|^p \leq 2^p \|f\|_\infty^p \cdot 1_K \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,\ \|h\| \leq 1$$

avec $2^p \|f\|_\infty^p \cdot 1_K \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Donc par Lebesgue

$$\|\tau_h f - f\|_p^p \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

Soit $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. Par 1.5.10(2), on peut choisir une $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ continue de support compact telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Choisissons $h_0 > 0$ assez petit tel que $\|\tau_h f - f\|_p \leq \varepsilon$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|h\| \leq h_0$. Alors

$$\|\tau_h g - g\|_p \leq \underbrace{\|\tau_h g - \tau_h f\|_p}_{\leq \|g-f\|_p \leq \varepsilon} + \underbrace{\|\tau_h f - f\|_p}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|f - g\|_p}_{\leq \varepsilon} \leq 3\varepsilon \quad \forall \|h\| \leq h_0 \quad ,$$

d'où on déduit que $\|\tau_h g - g\|_p \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

$\square$

Conséquence : Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fixé. Alors, l'application $\mathbb{R}^n \to L^p(\mathbb{R}^n),\ h \mapsto \tau_h f$ est continue partout, en fait uniformément continue. Pour le voir, soit $h_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé, alors

$$\|\tau_{h+h_0} f - \tau_{h_0} f\|_p = \|\tau_{h_0}(\tau_h f - f)\|_p = \|\tau_h f - f\|_p \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

1.6.4 Théorème : Continuité uniforme de la convolution de deux fonctions

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugués de Hölder et $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors, leur convolution $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve : Par remarque 1.6.1(1) $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est bien définie partout. Soient $x, h \in \mathbb{R}^n$, alors

$$(f * g)(x - h) - (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [f(x - h - y) - f(x - y)] \cdot g(y) \ dy \quad .$$

Si $p < \infty$, on peut utiliser lemme 1.6.3 d'après lequel $\|\tau_h f - f\|_p \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ pour conclure

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(f * g)(x - h) - (f * g)(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |(\tau_h f)(x - y) - f(x - y)| \cdot |g(y)| \ dy$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\tau_h f - f\|_p \cdot \|g\|_q \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad ,$$

c'est-à-dire la continuité uniforme de $f * g$. Si ailleurs $p = \infty$ et donc $q = 1$, on échange les rôles des f et g en notant que la convolution est symétrique comme opération.

$\square$

1.6.5 Théorème : Continuité de l'opération de convolution

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugués de Hölder et $n \in \mathbb{N}$. Alors, la convolution

$$* : L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n) \to (\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$$

est une application continue [4].

Preuve : Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ quelconques. Alors, car

$$|(f * g)(x)| \leq \int |f(y)g(x-y)| \, dy \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad ,$$

on déduit que vraiment $\|f * g\|_\infty < \infty$. De plus, par 1.6.4 $f * g$ est continue, donc $f * g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Pour $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\tilde{g} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}
\left|(f * g)(x) - (\tilde{f} * \tilde{g})(x)\right| &= \left|(f - \tilde{f}) * g(x) + \tilde{f} * (g - \tilde{g})(x)\right| \\
&\leq \int \left|(f - \tilde{f})(y) \cdot g(x-y)\right| \, dy + \int \left|\tilde{f}(y) \cdot (g - \tilde{g})(x-y)\right| \, dy \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left\|f - \tilde{f}\right\|_p \cdot \|g\|_q + \left\|\tilde{f}\right\|_p \cdot \|g - \tilde{g}\|_q \\
&\leq \left\|f - \tilde{f}\right\|_p \cdot \|g\|_q + \|f\|_p \cdot \left\|g - \tilde{g}\right\|_q + \left\|f - \tilde{f}\right\|_p \cdot \left\|g - \tilde{g}\right\|_q \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité de $*$.

□

Remarques

(i) Si $D_p \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et $D_q \subseteq L^q(\mathbb{R}^n)$ dense dans $L^q(\mathbb{R}^n)$, alors $D_p \times D_q$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$. Car $* : L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n) \to (\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ est continue, l'image $D_p * D_q$ est dense dans l'image $(L^p(\mathbb{R}^n) * L^q(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$.

1.6.6 Lemme : Fuit à l'infinité

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ bornée, dans le fermeture des fonctions continues de support compact $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ par rapport à $\|\cdot\|_\infty$. Alors

$$f(x) \overset{\|x\| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Choisissons $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(g) \subseteq B_R(0)$. Alors pour tout $x \notin B_R(0)$ on a $g(x) = 0$ et donc

$$|f(x)| = |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \quad ,$$

d'où suit l'affirmation.

□

4. On suppose sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ et $L^q(\mathbb{R}^n)$ la topologie induit par $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ respectivement et sur $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ la topologie produit. Noter qu'elle est induit par la métrique

$$d((f,g),(f',g')) := \|f' - f\|_p + \|g' - g\|_q \quad , \quad f, f' \in L^p(\mathbb{R}^n), \ g, g' \in L^q(\mathbb{R}^n) \quad .$$

.

1.6.7 Corollaire : Fuit de la convolution à l'infinité

Soient $1 < p, q < \infty$ conjugués de Hölder, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$(f * g)(x) \overset{\|x\| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

Preuve : Par 1.5.10(2) les fonctions continues à support compact $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ sont dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et $L^q(\mathbb{R}^n)$. Par remarque 1.6.5(i) on en déduit que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) * \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ et donc $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n) * L^q(\mathbb{R}^n)$ par rapport à $\|\cdot\|_\infty$. Autrement dit, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon > 0$ on trouve une continue $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ telle que $\left\|f * g - h\right\|_\infty < \varepsilon$. Par lemme 1.6.6 on en déduit que $(f * g)(x) \overset{\|x\| \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

□

1.7 Approximations de Dirac

1.7.1 Definition: Approximation de Dirac

Suit X un espace topologique, μ une mesure sur la σ-algèbre Borelienne $\mathscr{B}(X)$ de X et $x \in X$. Une suite $(\Phi_k)_{k=1}^\infty$ de fonctions $\Phi_k : X \to \mathbb{R}$ mesurables bornées est dit une **approximation de** δ_x (Dirac) ou une **approximation de l'identité** si :

1. Pour $k \in \mathbb{N}$ on a $\Phi_k \geq 0$ et
$$\int\limits_X \Phi_k \ d\mu = 1 \quad ,$$
c'est-à-dire, tout Φ_k est une densité de probabilité.
2. Pour toute voisinage $U \subseteq X$ de x on a
$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_{X \setminus U} \Phi_k \ d\mu = 0 \quad .$$

On dit que l'approximation de Dirac $(\Phi_k)_k$ est de **support compact** ssi il existe une compacte $K \subseteq X$ telle que $\mathrm{supp}(\Phi_k) \subseteq K \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Noter que en ce cas $x \in K$. On dit $(\Phi_k)_k$ **continue** (**lisse**) ssi toute Φ_k est continue (lisse).

1.7.2 Lemme : Création des approximations de Dirac

Soit λ^n la mesure de Lebesgue sur la σ-algèbre Borelienne $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ non-negative, de support compact et $\int \Phi \ d\mu = 1$. Alors la suite des fonctions $(\Phi_k)_{k=1}^\infty$ définies par $\Phi_k(x) := k^n \cdot \Phi(kx)$ pour $k \in \mathbb{N}$, est une approximation de Dirac δ_0 de support compact sur $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$.

Preuve : Prends $R > 0$ assez grand tel que $\mathrm{supp}(\Phi) \subseteq B_R(0)$, alors $\mathrm{supp}\, \Phi_k \subseteq B_R(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Évidement, tout Φ_k est une densité de probabilité. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un voisinage de 0, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(0) \subseteq U$ et un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que
$$\mathrm{supp}(\Phi)/k^n \subseteq B_\varepsilon(0)$$
pour tout $k \geq k_\varepsilon$. Donc $\mathrm{supp}(\Phi_k) \subseteq U$ pour tout $k \geq k_\varepsilon$, et donc
$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus U} \Phi_k \ d\mu = 0 \quad ,$$
ça veut dire que la propriété (2) est satisfait pareillement. □

Exemple : La fonction continue

$$\Phi(x) := C \cdot \exp\left[-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right] \cdot 1_{\{\|x\|<1\}}$$

avec C : const tel que $\int \Phi \, d\lambda = 1$, engendre une approximation de Dirac δ_0 lisse de support compact sur $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$, comme décrit par lemme 1.7.2.

1.7.3 Exemple : L'approximation de Dirac par la loi normale

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Considérons la famille des densités de probabilité $(\nu_s^n)_{s>0}$ de la loi normale $\mathcal{N}_{0,s}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ avec matrice de variances diag$(s, .., s)$. Alors, $(\nu_s^n)_{s>0}$ est pour $s \to 0^+$une approximation de Dirac δ_0 dans $\mathbb{R}^n$.

Preuve : Par définition toute $\nu_s^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité. Considérons d'abord le cas $n = 1$. Pour $\delta > 0$ on a

$$\int\limits_{B_\delta(0)} \nu_s^1(x)\, dx = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}}}{\sqrt{2\pi s}}\, dx = \int\limits_{-\delta/\sqrt{s}}^{\delta/\sqrt{s}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}} 1_{\{|y|\le\delta/\sqrt{s}\}} \cdot \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy \overset{s\to0^+}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy = 1 \quad ,$$

où on a utilisé le théorème de convergence monotone.
En cas $n \geq 1$ on a

$$\int\limits_{[-\delta,\delta]^n} \nu_s^n(x)\, dx = \prod_{k=1}^{n} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \nu_s^1\, dx \overset{s\to0^+}{\longrightarrow} 1 \quad .$$

□

1.7.4 Théorème : Approximations de Dirac comme formes linéaires

Soit X un espace topologique, μ une mesure sur la σ-algèbre Borelienne $\mathscr{B}(X)$ et $x \in X$. Soit $(\Phi_k)_{k=1}^\infty$ une approximation de δ_x de support compact sur $(X, \mathscr{B}(X), \mu)$ et $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions complexes, continues sur X. Alors :

1. Chaque Φ_k est une forme linéaire sur $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ comme

$$\Phi_k : f \mapsto \langle \Phi_k, f\rangle := \int \Phi_k \cdot f \, d\mu \quad , \; f \in \mathcal{C}_b(X, \mathbb{C}) \quad , \tag{1.7.4.1}$$

qui est continue avec norme $\|\Phi_k\| = 1$ sur le sous-espace $(\mathcal{C}_b(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues, bornées.

2. La suite $(\Phi_k)_{k=1}^\infty$ converge faiblement* dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})^*$ vers la distribution de Dirac δ_x. Autrement dit, pour $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ on a

$$\langle \Phi_k, f\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle \delta_x, f\rangle := f(x) \quad .$$

Preuve :

1. Évidement $\Phi_k : \mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est bien définie car $\Phi_k f$ est intégrable pour tout $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Bien sûr, l'application est linéaire. Soit $f \in \mathcal{C}_b(X, \mathbb{C})$, alors d'une part on a

$$|\langle \Phi_k, f\rangle| \leq \int\limits_X \Phi_k \cdot |f| \; d\mu \leq \|f\|_\infty \cdot \int \Phi_k \, d\mu = \|f\|_\infty \quad .$$

D'autre part $1 \in \mathcal{C}_b(X, \mathbb{C})$ et

$$|\langle \Phi_k, 1\rangle| = \int\limits_X \Phi_k \, d\mu = 1 \cdot \|1\|_\infty \quad ,$$

donc $\|\Phi_k\| = 1$ sur $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{C})$.

2. Soit $K \subseteq X$ compacte telle que $\operatorname{supp}\Phi_k \subseteq K \quad \forall k$. Soit $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$ n'importante quel. Alors f est bornée sur K. Pose $U := f^{-1}(B^o_\varepsilon(f(x)))$. Alors U est un voisinage de x et on trouve

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} |\langle\Phi_k, f\rangle - \langle\delta_x, f\rangle| &= \lim_{k\to\infty} \left| \int \Phi_k(y)\cdot f(y)\ d\mu(y) - f(x)\int \Phi_k(y)\ d\mu(y)\right| \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \int \Phi_k(y)\cdot|f(y)-f(x)|\ d\mu(y) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int\limits_U \Phi_k(y)\,|f(y)-f(x)|\ d\mu(y) + \lim_{k\to\infty}\int\limits_{U^c}\Phi_k(y)\,|f(y)-f(x)|\ d\mu(y) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sup_{y\in U}|f(y)-f(x)|}_{\leq\varepsilon}\cdot\underbrace{\int\limits_U \Phi_k\ d\mu}_{\leq 1} + 2\underbrace{\sup_{y\in K}|f(y)|}_{<\infty}\cdot\underbrace{\lim_{k\to\infty}\int\limits_{U^c}\Phi_k\ d\mu}_{0} \leq \varepsilon \quad .
\end{aligned}$$

Car ε était arbitraire, il faut

$$\lim_{k\to\infty} |\langle\Phi_k, f\rangle - \langle\delta_x, f\rangle| = 0 \quad .$$

□

1.7.5 Théorème : Convergence uniforme des convolutions des approximations de Dirac

Soit $(\Phi_k)_{k=1}^\infty$ une approximation de Dirac δ_0 de support compact sur l'espace $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ continue. Alors les convolutions $\Phi_k * f$ sont bien définies partout et convergent vers f uniformément sur toute compacte. Autrement dit, pour toute compacte $C \subseteq \mathbb{R}^n$ on a

$$\sup_{x\in C} |(\Phi_k * f)(x) - f(x)| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

Preuve : La preuve est proche de la preuve du théorème 1.7.4. Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact tel que $\operatorname{supp}(\Phi_k) \subseteq K\ \forall\ k$. Car l'intégral

$$(\Phi_k * f)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(y)\cdot f(x-y)\ dy$$

est en fait un intégral d'une fonction bornée sur une compacte, il est fini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
Soient $C, L \subseteq \mathbb{R}^n$ compactes telles que $C \subseteq L$ et $(C-K) \subseteq L$. Alors f est uniformément continue sur L. Soit $\varepsilon > 0$ n'importante quel et $\delta > 0$ tel que $f(B_\delta(x)\cap L) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$ pour tout $x \in L$. Prends $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$2\sup_{z\in L}|f(z)|\cdot \int\limits_{K\setminus B^o_\delta(0)} \Phi_k(y)\ dy \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $k \geq k_0$. Alors, pour tout $k \geq k_0$ et $x \in C$ on a

$$\begin{aligned}
|(\Phi_k * f)(x) - f(x)| &\leq \int \Phi_k(y)\cdot|f(x-y)-f(x)|\ dy \\
&= \int\limits_{K\cap B^o_\delta(0)} \Phi_k(y)\cdot\underbrace{|f(x-y)-f(x)|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}}\ dy + \int\limits_{K\setminus B^o_\delta(0)}\Phi_k(y)\cdot|f(x-y)-f(x)|\ dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\cdot\underbrace{\int\limits_{B^o_\delta(0)}\Phi_k(y)\ dy}_{\leq 1} + \underbrace{2\sup_{z\in L}|f(z)|\cdot\int\limits_{K\setminus B^o_\delta(0)}\Phi_k(y)\ dy}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon \quad .
\end{aligned}$$

Donc, $(\Phi_k * f)\big|_C \underset{\|\cdot\|_\infty}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} f\big|_C$.

□

1.7.6 Théorème : Convergence ponctuelle des convolutions des approximations de Dirac

Soit $(\Phi_k)_{k=1}^{\infty}$ une approximation de Dirac δ_0 sur l'espace $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ continuée, bornée. Alors les convolutions $\Phi_k * f$ sont bien définies partout et convergent ponctuellement vers f.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$(\Phi_k * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(y) \cdot f(x-y)\ dy$$

est bien défini car f est bornée et Φ_k intégrable. Note que

$$(\Phi_k * f)(x) - f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(y) \cdot [f(x-y) - f(x)]\ dy$$

et donc

$$|(\Phi_k * f)(x) - f(x)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(y) \cdot |f(x-y) - f(x)|\ dy \quad .$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Alors il existe un $\delta > 0$ tel que $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$. On peut donc écrire

$$|(\Phi_k * f)(x) - f(x)| \leq \int\limits_{B_\delta(0)} \Phi_k(y) \cdot \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{\leq \varepsilon}\ dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \Phi_k(y) \cdot |f(x-y) - f(x)|\ dy$$

$$\leq \varepsilon \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(y)\ dy}_{1} + 2\,\|f\|_\infty \cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \Phi_k(y)\ dy}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

et trouve que pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand

$$|(\Phi_k * f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon \quad .$$

Noter que la convergence n'est pas forcement uniforme, comme le choix de $\delta > 0$ dépend du point x.

□

1.7.7 Théorème : L^p-convergence des convolutions des approximations de Dirac

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac δ_0 de support compact dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$. Soit $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Alors, les convolutions $\Phi_k * f$ sont bien définies, dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et convergent dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ vers f.

Preuve : Comme toute Φ_k est bornée et de support compact, elle est dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 \le q \le \infty$. Donc, par remarque 1.6.1(1) la convolution $\Phi_k * f$ existe partout. On a

$$\|\Phi_n * f - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |(\Phi_n * f)(x) - f(x)|^p \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_n(y) f(x-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_n(y) f(x)\, dy \right|^p dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_n(y) \cdot [f(x-y)\, dy - f(x)] \, dy \right|^p dx$$

$$\overset{\substack{\text{Jensen} \\ 1.2.1}}{\le} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_n(y) \, |f(x-y) - f(x)|^p \, dy \, dx$$

$$\overset{\text{Tornelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_n(y) \, |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \, dy}_{\Phi_n(y) \cdot \|\tau_y f - f\|_p^p} \quad ,$$

où $\tau_y f : x \mapsto f(x-y)$. Note que pour l'inégalité de Jensen on a utilisé le fait que $\Phi_n(x)\, dx$ est une mesure de probabilité. Soit $\delta \in (0, \pi)$ quelconque, alors

$$\|\Phi_n * f - f\|_p^p \le \int_{B_\delta^o(0)} \Phi_n(y) \, \|\tau_y f - f\|_p^p \, dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta^o(0)} \Phi_n(y) \underbrace{\|\tau_y f - f\|_p^p}_{\le 2\|f\|_p^p} dy$$

$$\le \sup_{\|y\| \le \delta} \|\tau_y f - f\|_p^p + 2 \, \|f\|_p^p \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta^o(0)} \Phi_n(y) \, dy \quad .$$

Par 1.6.3 on sait que $\|\tau_y f - f\|_p^p \overset{y \to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc, car $(\Phi_n)_n$ est une approximation de Dirac δ_0 dans $\mathbb{R}^n$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $0 < \delta$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand tel que

$$\|\Phi_n * f - f\|_p^p \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_0 \quad .$$

De cela suit l'affirmation.

□

1.7.8 Exemple : Gaussiennes et l'équation de la chaleur

Considérons la densité de probabilité ν_s de la loi normale $\mathcal{N}_{0,s}$ sur $\mathbb{R}$ de variance $s > 0$. Pour $f_0 \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ on pose $f_s := f_0 * \nu_s$. Note que comme ν_s est bornée et f_0 intégrable, par 1.6.5 leur convolution existe partout, est continue et bornée. Alors :

1. Pour tout $s > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a
$$\frac{\partial}{\partial s} \nu_s(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nu_s(x) \quad ,$$
c'est-à-dire $\nu : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait l'**équation de la chaleur**.
2. Pour tout $s > 0$ fixé, la fonction $f_s = f_0 * \nu_s$ est lisse et possède les dérivées $f_s^{(n)} = f_0 * \nu_s^{(n)}$.
3. Pour tout $s > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a
$$\frac{\partial}{\partial s} f_s(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_s(x) \quad ,$$
c'est-à-dire $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait aussi l'équation de la chaleur.

4. La famille $(f_s)_{s>0}$ converge ponctuellement vers f_0 quand $s \to 0^+$.

Preuve :

1. Preuve par la directe.
2. Note que par A.1.4 pour tout $s > 0$ la densité ν_s est lisse avec dérivées bornées. Par théorème 1.6.2, conséquence (i) sur les dérivations de convolutions, cela et le fait $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ impliquent l'affirmation.
3. Admettons qu'on peut dériver sous le signe somme. Alors

$$\partial_s f_s(x) = \int_{\mathbb{R}} f_0(y) \cdot \underbrace{\partial_s \nu_s(x-y)}_{\substack{\frac{1}{2}\partial_x^2 \nu_s(x-y) \\ \text{par (1)}}} \, dy = \frac{1}{2} f_0 * \nu_s^{(2)} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\partial_x^2 f_s(x) \quad .$$

Il reste à montrer que la dérivation sous la signe somme est vraiment légitime. On a

$$|f_0(y) \cdot \partial_s \nu_s(x-y)| \overset{A.1.4}{=} \frac{1}{2} |f_0(y)| \cdot H_2\left[\tfrac{(x-y)}{\sqrt{s}}\right] \cdot \frac{\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2s}\right]}{s^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2\pi}} \leq \frac{|f_0(y)|}{s^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{8\pi}} \cdot \underbrace{\sup_{z\in\mathbb{R}} H_2(z) e^{-\frac{z^2}{2}}}_{=:C<\infty} \quad .$$

Soit $s_0 > 0$ quelconque, fixé. Alors pour $s > s_0$ on a la domination

$$|f_0(y) \cdot \partial_s \nu_s(x-y)| \leq \frac{C \cdot |f_0(y)|}{s_0^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{8\pi}}$$

par une fonction intégrable de y qui ne dépend pas de s. Donc, on peut vraiment appliquer le formule de dérivation sous le signe somme pour $s \in (s_0, \infty)$. Comme $s_0 > 0$ peut être choisi aussi petit qu'on veut, le formule est donc vraie pour tout $s > 0$.
4. Par exemple 1.7.3 la famille $(\nu_s)_{s>0}$ est une approximation de Dirac δ_0. Comme $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, par théorème 1.7.6 les convolutions $f_0 * \nu_s$ convergent ponctuellement vers f_0.

□

1.7.9 Théorème : Caractérisation des fonctions nulles

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \cdot f \, d\lambda^n = 0$$

pour toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors, $g = 0$ presque partout.

Preuve : Choisissons une approximation de Dirac $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de support compact sur $\mathbb{R}^n$, telle que $\Phi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors, par 1.7.7 on sait que $\Phi_k * g \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} g$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Par théorème 1.5.4, $(\Phi_k * g)_k$ possède une sous-suite qui converge vers g μ-presque partout. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$(\Phi_k * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(x-y) g(y) \, dy = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

car $\Phi_k(x - \cdot) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, donc $\Phi_k * g \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ponctuellement. Donc, $g = 0$ presque partout.

□

1.8 Espaces de Sobolev

1.8.1 Definition: La dérivée faible

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert. Soit $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables $\Omega \to \mathbb{C}$ localement intégrables [5] et $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ l'espace des fonctions $\Omega \to \mathbb{C}$ lisses de support compact. Si $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ est un multi-indice et $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, alors on dit g la **α-ième dérivée faible** de f si

$$\int_\Omega f(x) \cdot u^{(\alpha)}(x)\ dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega g(x) \cdot u(x)\ dx \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \quad .$$

On dit que $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ est α **fois faiblement dérivable** si elle possède dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ une α-ième dérivée faible.

Remarques

(i) Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ est faiblement dérivable, alors tous deux dérivées faibles de f sont égales presque partout [Bois-Reymond]. On note $f^{[\alpha]} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ la α-ième dérivée faible de f.

(ii) Si $f_1, f_2 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sont faiblement dérivables avec dérivées $g_1, g_2 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, alors $(f_1 + f_2)$ et $f_1 \cdot f_2$ sont faiblement dérivables avec dérivées faibles $(g_1 + g_2)$ et $(f_1 g_2 + g_1 f_2)$ respectivement.

1.8.2 Lemme : Convolution et dérivée faible

Soient $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tels que g est la dérivée faible de f. Alors, pour toute $u \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})$, la convolution $(u * f)$ est dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et dérivable, avec dérivée classique

$$\boxed{(u * f)' = (u' * f) = (u * g) \quad .}$$

Preuve : Noter que $u \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ est aussi dans $L^\infty(\mathbb{R})$, de support compact K. Donc, par remarque 1.6.1(4) sur convolutions, $(u * f)$ est bien définie partout et dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. On va montrer que

$$\partial_x (u * f)\big|_{x_0} = (u * g)(x_0) \quad .$$

Pour cela, il suffit d'étudier $u * f$ dans un voisinage V de x_0, supposé compact. Pour tout $x \in V$ on a

$$(u * f)(x) = \int_\mathbb{R} u(y) \cdot f(x - y)\ dy = \int_K u(y) \cdot f(x - y)\ dy = \int_K u(y) \cdot f\big|_{V-K}(x - y)\ dy = \left(u * f\big|_{V-K}\right)(x) \quad .$$

Noter que comme $(V - K) \subseteq \mathbb{R}$ est compact, la restriction $f\big|_{V-K}$ (misée zéro dehors $(V - K)$) est intégrable. Donc, par 1.6.2(ii) la convolution $u * f\big|_{V-K}$ est dérivable avec dérivée $u' * f\big|_{V-K}$, donc

$$\partial_x (u * f)\big|_{x_0} = \partial_x \left(u * f\big|_{V-K}\right)(x_0) = \int_\mathbb{R} u'(x_0 - y) \cdot \underbrace{f\big|_{V-K}(y)}_{f(y)}\ dy = (u' * f)(x_0) \quad . \tag{1.8.2.1}$$

De plus, par définition de la dérivée faible on a

$$\partial_x (u * f)(x_0) \overset{(1.8.2.1)}{=} \int_\mathbb{R} \partial_x u(x_0 - y) \cdot f(y)\ dy = -\int_\mathbb{R} (\partial_y u(x_0 - y)) \cdot f(y)\ dy$$

$$= \int_\mathbb{R} u(x_0 - y) \cdot g(y)\ dy = (u * g)(x_0)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui complète la preuve.

□

5. Voir 1.1.3. Se rappeler que par remarque 1.1.3(ii) on a $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

1.8.3 Lemme de Bois-Reymond : Dérivée faible et classique

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert et $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$. Alors, g est la dérivée faible de f ssi elle est la dérivée de f au sens classique.

Preuve pour $n = 1$:

Direction "⇐" : Soit $g = f'$ la dérivée de f au sens classique. Alors, pour toute $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ on a

$$0 = \int_\Omega (f \cdot u)' = \int_\Omega f' \cdot u + \int_\Omega f \cdot u'$$

et donc

$$\int_\Omega f \cdot u' = -\int_\Omega f' \cdot u \quad .$$

Direction "⇒" : Supposer que g est la dérivée faible de f. Choisissons une approximation de Dirac δ_0 lisse $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de support compact. Alors, par lemme 1.8.2 on a $(u_n * f)' = (u_n * g)$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ on a

$$(u_n * f)(x+\varepsilon) - (u_n * f)(x) = \int_0^\varepsilon (u_n * f)'(x+t)\ dt = \int_0^\varepsilon (u_n * g)(x+t)\ dt \quad . \tag{1.8.3.1}$$

Se rappeler que comme f, g sont continues, par théorème 1.7.5 les suites $(u_n * f)_n$ et $(u_n * g)_n$ convergent uniformément sur toute compacte vers f et g respectivement. Donc, en prenant la limite dans (1.8.3.1) on obtient

$$f(x+\varepsilon) - f(x) = \int_0^\varepsilon g(x+t)\ dt$$

pour n'importante quel $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f(x+\varepsilon) - f(x)\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon g(x+t)\ dt \overset{g\in\mathcal{C}}{=} g(x) \quad ,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $f' = g$.

□

1.8.4 Definition: Espace de Sobolev

Pour $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$, ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et $1 \le p \le \infty$ on pose

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \text{toutes dérivées faibles de } f \text{ d'ordre} \le k \text{ existent dans } L^p(\Omega)\} \quad .$$

Alors, $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace linéaire. La norme

$$\|f\|_{W^{k,p}} := \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\le k}} \left\|f^{[\alpha]}\right\|_{L^p} \quad , \quad f \in W^{k,p}(\Omega)$$

où $f^{[\alpha]}$ est la α-ième dérivée faible de f, fait de $W^{k,p}(\Omega)$ un espace normé, appelé **espace de Sobolev**.

1.8.5 Théorème : Complétude de $W^{k,p}$

Soit $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert et $1 \le p \le \infty$. Alors, l'espace de Sobolev $\left(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}}\right)$ est un espace de Banach.

Preuve : Soit $\mathcal{N}_{k,n} := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \leq k\}$ l'ensemble des multi-indices de degré $\leq k$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{k,p}(\Omega)$ une suite de Cauchy. Alors, par définition de la norme $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ la suite $\left(f_n^{[\alpha]}\right)_n$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathcal{N}_{k,n}$. Donc, il existe $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{N}_{k,n}} \subseteq L^p(\Omega)$ tels que $f_n^{[\alpha]} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_\alpha$ dans $L^p(\Omega)$. Il reste à voir que $f_\alpha = f_0^{[\alpha]}$ au sens faible pour tout $\alpha \in \mathcal{N}_{k,n}$. En effet, pour $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega u \cdot f_\alpha \overset{\text{Hölder}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u \cdot f_n^{[\alpha]} = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u^{(\alpha)} \cdot f_n \overset{\text{Hölder}}{=} - \int_\Omega u^{(\alpha)} \cdot f_0 \quad ,$$

où on a utilisé le fait que $u^{(\alpha)} \in L^q(\Omega)$ $\forall \alpha \in \mathcal{N}_{k,n}$ pour q comme conjugué de Hölder de p. Donc $f_0 \in W^{k,p}(\Omega)$ et

$$f_n \underset{\|\cdot\|_{W^{k,p}}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f_0 \quad ,$$

ce qui montre la complétude de $W^{k,p}(\Omega)$.

$\square$

2 Espaces normés généraux

2.1 Théorème de l'application ouverte

2.1.1 Lemme : Caractérisation des applications linéaires, ouvertes

Soient E, F deux espaces normés et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors, les suivantes sont équivalents :

1. $T : E \to F$ est ouverte.
2. Il existe une constante $c > 0$ telle que $B_c(0_F) \subseteq T(B_1(0_E))$.

Preuve :

1 $\Rightarrow$ 2 **:** Comme $B_1^o(0_E)$ est ouverte, l'image $T(B_1^o(0_E))$, contenant 0_F, est ouverte dans F. Donc, il existe une boule $B_c(0_F) \subseteq T(B_1^o(0_E))$.

2 $\Rightarrow$ 1 **:** Il suffit de montrer que pour tout point $x \in E$ et ouverte $U \subseteq E$ contenant x, il existe une ouverte $V \subseteq F$ telle que $f(x) \in V \subseteq f(U)$. Comme U est ouverte, il existe une boule $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Par translation on peut supposer que $x = 0$, par dilatation on peut supposer que $\varepsilon = 1$. Alors, par hypothèse il existe un $c > 0$ tel que $B_c^o(T(x)) \subseteq T(B_\varepsilon(x)) \subseteq T(U)$.

□

2.1.2 Théorème des opérateurs ouverts

Soient E, F deux espaces de Banach. Alors, toute application linéaire, continue, surjective $T : E \to F$ est ouverte.

Preuve : La preuve se déroule en deux étapes.
Proposition : Il existe $c > 0$ tel que

$$B_{2c}(0_F) \subseteq \overline{T(B_1(0_E))} \tag{$\clubsuit$}$$

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $X_n := n\overline{T(B_1(0))} = \overline{T(B_n(0))} \subseteq F$. Alors, tout X_n est fermé et par surjectivité de f on a $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Comme F est complet, par le théorème de Baire 2.3.1 il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que X_{n_0} possède un intérieur non-vide. Mais cela implique que $\overline{T(B_1(0))}$ possède un intérieur non-vide. Il existe donc un $y_0 \in F$ et $c > 0$ tel que $B_{4c}(y_0) \subseteq \overline{T(B_1(0))}$. Par symétrie aussi $B_{4c}(-y_0) \subseteq \overline{T(B_1(0))}$. Donc

$$B_{4c}(0) = -y_0 + B_{4c}(y_0) \subseteq \overline{T(B_1(0))} + \overline{T(B_1(0))} \subseteq \overline{T(B_1(0)) + T(B_1(0))}$$

$$= \overline{T(B_1(0) + B_1(0))} = 2\overline{T(B_1(0))} \quad .$$

Proposition : $B_c(0_F) \subseteq T(B_1(0_E))$.

Preuve : Soit $y \in B_c(0_F)$ quelconque, fixé. On cherche un $s \in B_1(0_E)$ tel que $y = T(s)$. Par ($\clubsuit$), pour tout $u \in B_{2c}(0_F)$ et $\varepsilon > 0$ il existe un $v \in B_1(0_E)$ tel que $\|Tv - u\|_F \leq \varepsilon$. On applique ($\clubsuit$) à $2y \in B_{2c}(0_F)$ et trouve un $x_1 \in E$ tel que $\|x_1\| \leq \frac{1}{2}$ et $\|Tx_1 - y\| \leq \frac{c}{2}$. On applique ($\clubsuit$) à $4(Tx_1 - y)$ et trouve un $x_2 \in E$ tel que $\|x_2\| \leq \frac{1}{4}$ et $\|T(x_1 + x_2) - y\| \leq \frac{c}{4}$. Par récurrence, on construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ telle que $\|x_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ et $\|T(x_1 + .. + x_n) - y\| \leq \frac{c}{2^n}$. La suite des sommes partielles $s_n := \sum_{k=1}^n x_k$ converge normalement, donc est de Cauchy. Par complétude de E, elle converge vers un $s \in E$. Noter que $\|s\| \leq \sum_{k=1}^\infty \|x_n\| \leq 1$ et $y = Ts$ par continuité de T.

Par lemme 2.1.1, T est ouverte.

□

2.1.3 Corollaire sur l'inverse des isomorphismes

Soient E, F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ linéaire, continue, bijective. Alors, son inverse $T^{-1} : F \to E$ est aussi continue.

Preuve : Par 2.1.2 on sait que $T : E \to F$ est ouverte. Donc, si $U \subseteq E$ est ouverte, alors $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ est ouverte. Donc T^{-1} est continue.

□

Conséquence : L'ensemble des applications linéaires, continues, bijectives $E \to F$ forme par rapport à la composition un groupe.

2.1.4 Definition: Normes équivalentes

Soit E un espace linéaire. Alors, deux normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sur E ont dit **équivalentes** s'il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \quad , \quad \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

pour tout $x \in E$.

Remarques

(i) Deux normes équivalents induisent la même topologie sur E.

2.1.5 Corollaire : Caractérisation d'équivalence de normes

Soit E un espace linéaire et $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ deux normes sur E tels que les espaces $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ sont complets. Alors,, il y a équivalence entre :

1. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.
2. Il existe un $c > 0$ tel que $\|x\|_1 \leq c \|x\|_2$ pour tout $x \in E$.

Preuve :

1 ⇒ 2 : Trivial.

2 ⇒ 1 : Considérons l'application linéaire $T := \mathrm{Id} : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$. Alors, T est par hypothèse continue avec norme $\|T\| \leq c$. Par corollaire 2.1.3 l'inverse $\mathrm{Id} : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ est aussi continue, c'est-à-dire $\|x\|_2 \leq c' \cdot \|x\|_1 \ \forall x \in E$ pour une certaine constante $c' > 0$.

□

2.1.6 Corollaire : Caractérisation de la continuité des projections

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach, $U, V \subseteq E$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $p_U : E \to U,\ p_V : E \to V$ leurs projections associées[6]. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. p_U est continue.
2. p_U, p_V sont continues.
3. U, V sont fermés.

Preuve :

1 ⇔ 2 : Suit du fait que $\mathrm{Id}_E = p_U + p_V$.

2 ⇒ 3 : Suit du fait que $U = \ker(p_V)$ et $V = \ker(p_U)$.

3 ⇒ 2 : Comme U, V sont sous-espaces fermés d'un espace de Banach, ils sont eux-mêmes espaces de Banach par rapport à la restriction de la norme $\|\cdot\|_E$. Considérons l'application linéaire

$$S : U \times V \to E \quad , \quad (u, v) \mapsto u + v \quad .$$

6. C'est-à-dire pour tout $x \in E$, $(p_U(x), p_V(x)) \in U \times V$ est la seule paire $(u, v) \in U \times V$ satisfaisant $x = u + v$.

Alors, comme $E = U \oplus V$, elle est bijective avec inverse

$$S^{-1} = (p_U, p_V) : E \to U \times V \quad , \quad x \mapsto (p_U(x), p_V(x)) \quad .$$

On munit $U \times V$ de la norme produit

$$\|\cdot\| : U \times V \to \mathbb{R} \quad , \quad \|(u,v)\| := \max\{\|u\|_E, \|v\|_E\} \quad .$$

Comme $(U, \|\cdot\|_E), (V \|\cdot\|_E)$ sont complets, par lemme A.3.7 l'espace $(U \times V, \|\cdot\|)$ est aussi complet. L'application $S : U \times V \to E$ est continue, car

$$\|S(u,v)\|_E = \|u+v\|_E \leq \|u\|_E + \|v\|_E \leq 2\max\{\|u\|_E, \|v\|_E\} = 2\|(u,v)\|$$

pour tout $(u,v) \in U \times V$. Par corollaire 2.1.3, l'inverse $(p_U, p_V) : (E, \|\cdot\|_E) \to (U \times V, \|\cdot\|)$ est aussi continue. Comme $\|\cdot\|$ induit par A.3.7 sur $U \times V$ la topologie produit, les p_U, p_V sont continues.

Remarque sur la preuve : L'étape 3 $\Rightarrow$ 2 pourrait être prouvé également en utilisant corollaire 2.1.5 sur l'équivalence des normes, appliqué aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\| := \|p_U(\cdot)\|_E + \|p_V(\cdot)\|_E$ sur E.

□

2.1.7 Théorème du graphe fermé

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. Soit $T : E \to F$ une application linéaire. Alors, son graphe

$$\mathscr{G}(T) := \{(x, T(x)) : x \in E\}$$

est fermé (par rapport à la topologie produit) ssi T est continue.

Preuve :
Direction "$\Rightarrow$" : On considère sur E les deux normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ données par

$$\|x\|_1 := \|x\|_E \quad , \quad \|x\|_2 := \|x\|_E + \|Tx\|_F$$

pour tout $x \in E$. Alors, $(E, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach : Pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (E, \|\cdot\|_2)$, $(x_n)_n$ est de Cauchy par rapport à $\|\cdot\|_E$ et $(Tx_n)_n$ est de Cauchy par rapport à $\|\cdot\|_F$. Donc, $x_n \underset{\|\cdot\|_E}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} x$ et $Tx_n \underset{\|\cdot\|_F}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} y \in F$ pour quelques $x \in E$, $y \in F$. Donc $(x_n, Tx_n)_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x,y) \in E \times F$, et comme $\mathscr{G}(T)$ est fermé, $(x,y) \in \mathscr{G}(T)$, c'est-à-dire $y = T(x)$. Donc $x_n \underset{\|\cdot\|_2}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} x$.

Donc, comme $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ sont complets et $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$, par corollaire 2.1.5 on sait aussi que $\|\cdot\|_2 \leq c \cdot \|\cdot\|_1$ pour un certain $c > 0$. Donc

$$\|Tx\|_F \leq (c-1) \cdot \|x\|_E \quad \forall x \in E \quad ,$$

c'est-à-dire T est continue.

Direction "$\Leftarrow$" : Considérons l'application

$$f : E \times F \to F \quad , \quad f : (x,y) \mapsto T(x) - y \quad .$$

Alors, $\mathscr{G}(T) = f^{-1}(\{0\})$. Comme T est continue, f est également. Comme $\{0\}$ est fermé dans F, $\mathscr{G}(T)$ est également.

□

2.2 Théorèmes de Hahn-Banach

2.2.1 Definition: Demi-norme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Une **demi-norme** sur E est une application $p : E \to \mathbb{R}$ qui est :

1. **Positivement homogène**, c'est-à-dire $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.
2. **Sous-additive**, c'est-à-dire $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$.

Remarques

(i) Toute norme sur E est une demi-norme.

(ii) Les deux axiomes d'une demi-norme impliquent que $p(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ et que $p(0) = 0$.

2.2.2 Le théorème de Hahn-Banach

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p : E \to \mathbb{R}_+$ une demi-norme sur E. Soit $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel et $a : V \to \mathbb{K}$ une forme linéaire sur V majorée par p en valeur absolute, c'est-à-dire $|a(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in V$. Alors, il existe une forme linéaire $\tilde{a} : E \to \mathbb{K}$ qui prolonge a sur E et satisfait encore $|\tilde{a}(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in E$.

2.2.3 Le théorème de Hahn-Banach pour le cas réel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application satisfaisant :

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et $x \in E$.

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$.

Soit $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel et $a : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur V telle que $a(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in V$. Alors, il existe une forme linéaire $\tilde{a} : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge a et satisfait encore $\tilde{a}(x) \leq p(x)$ $\forall x \in E$.

Preuve : La preuve utilise le lemme de Zorn A.5.3 sur ensembles partiellement ordonnés, inductifs, non-vides. Posons

$$X := \left\{ h : D(h) \to \mathbb{R} \text{ linéaire} \mid \substack{D(h) \text{ sous-espace vectoriel de } E,\ D(h) \supseteq X \\ h\big|_X = a,\ h(x) \leq p(x)\ \forall x \in D(h)} \right\} .$$

Alors, la relation binaire "$\leq$" sur X définie comme

$$h_1 \leq h_2 \;:\Leftrightarrow\; D(h_1) \subseteq D(h_2) \;\wedge\; h_1 = h_2\big|_{D(h_1)} \quad ,$$

fait de X un ensemble partiellement ordonné. De plus, $(X, \leq)$ est inductif, car pour tout sous-ensemble $(h_i)_{i \in I} \subseteq X$ totalement ordonné, l'application

$$h : D(h) \to \mathbb{R} \quad , \quad h(x) := \Big\{ h_i(x) \quad : x \in D(h_i)$$

définie sur le sous-espace vectoriel $D(h) := \bigcup_{i \in I} D(h_i)$ est bien définie, dans X et majorant pour $(h_i)_{i \in I}$. Par Zorn, il existe donc un élément maximal $\tilde{a}$ de $(X, \leq)$ avec domaine $D(\tilde{a})$.

Il reste à montrer que $D(\tilde{a}) = E$. Supposons que $x_0 \in E \setminus D(\tilde{a})$. Posons $D(h) := D(\tilde{a}) \oplus \mathbb{R}x_0$ et $h : D(h) \to \mathbb{R}$ comme

$$h(x + \lambda x_0) := \tilde{a}(x) + \lambda \cdot \alpha \quad , \quad x \in D(\tilde{a}),\ \lambda \in \mathbb{R} \quad ,$$

où $\alpha =: h(x_0) \in \mathbb{R}$ sera choisi tel que $h(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in D(h)$. Le cas échéant, h sera dans X et $\tilde{a} < h$, une contradiction à la maximalité de $\tilde{a}$. Il reste donc de trouver cet $\alpha \in \mathbb{R}$, satisfaisant $\tilde{a}(x) + \lambda\alpha \leq p(x + \lambda x_0)$ pour tout $x \in D(\tilde{a})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour cela, il suffit de trouver un α satisfaisant

$$\tilde{a}(x) - p(x - x_0) \leq \alpha \leq p(x + x_0) - \tilde{a}(x) \tag{2.2.3.1}$$

pour tout $x \in D(\tilde{a})$, car en ce cas on aurait

$$\tilde{a}(x) + \lambda\alpha = \lambda \cdot \left[\tilde{a}\left(\tfrac{x}{\lambda}\right) + \alpha\right] \leq \lambda p\left(\tfrac{x}{\lambda} + x_0\right) = p(x + \lambda x_0) \qquad \forall \lambda > 0$$

$$\tilde{a}(x) + \lambda\alpha = (-\lambda) \cdot \left[\tilde{a}\left(\tfrac{x}{-\lambda}\right) - \alpha\right] \leq (-\lambda) \cdot p\left(\tfrac{x}{-\lambda} - x_0\right) = p(x + \lambda x_0) \qquad \forall \lambda < 0$$

(le cas $\lambda = 0$ étant trivial). Pour (2.2.3.1), il suffit de montrer que

$$\sup_{x \in D(\tilde{a})} [\tilde{a}(x) - p(x - x_0)] \leq \inf_{x \in D(\tilde{a})} [p(x + x_0) - \tilde{a}(x)] \quad .$$

Pour cela, il suffit de montrer que

$$\tilde{a}(x) + \tilde{a}(y) \leq p(x - x_0) + p(y + x_0) \quad \forall x, y \in D(\tilde{a}) \quad .$$

Mais cela est vrai, car

$$\tilde{a}(x) + \tilde{a}(y) = \tilde{a}(x + y) \leq p(x + y) = p(x - x_0 + y + x_0) \leq p(x - x_0) + p(y + x - 0) \quad \forall x, y \in D(\tilde{a}) \quad .$$

Cela complète la preuve.

□

2.2.4 Corollaire : Prolongement de formes linéaires continues

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace $\mathbb{K}$-linéaire normé et soit $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel de E. Soit $a : V \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une $\tilde{a} \in E'$ qui prolonge a sur E et qui vérifie $\|\tilde{a}\| = \|a\|$.

Preuve : On applique le théorème de Hahn-Banach 2.2.2 à la demi-norme $p(x) := \|x\| \cdot \|a\|$.

□

2.2.5 Corollaire : Existence des opérateurs maximisantes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace $\mathbb{K}$-linéaire normé et $x \in E \setminus \{0\}$. Alors, il existe un $a \in E'$ tel que $\|a\| = 1$ et $a(x) = \|x\|$.

Preuve : On applique corollaire 2.2.4 au sous-espace $V := \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(x)$ et la forme linéaire continue $a : \lambda x \mapsto \lambda \|x\|$, définie sur V. Alors, a peut être prolongée à la forme linéaire continue $\tilde{a} \in E'$ satisfaisant les affirmations.

□

2.2.6 Corollaire sur la norme de vecteurs

Soit E un espace $\mathbb{K}$-linéaire normé et $x \in E$ quelconque. Alors

$$\boxed{\|x\| = \max_{\substack{a \in E' \\ \|a\| \leq 1}} |a(x)| \quad .}$$

Preuve : Pour $a \in E'$ avec $\|a\| \leq 1$ on a toujours

$$|a(x)| \leq \|a\| \cdot \|x\| \leq \|x\| \quad .$$

D'autre part, on peut par 2.2.5 trouver toujours une forme linéaire continue $a \in E'$ telle que $\|a\| = 1$ et $a(x) = \|x\|$, ce qui preuve l'affirmation.

□

2.2.7 Definition: Hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un **hyperplan affine** $\mathcal{H}$ de E est un sous-ensemble de la forme

$$\mathcal{H} = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

pour une forme linéaire $0 \neq f : E \to \mathbb{K}$ et un $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit $\mathcal{H}$ l'hyperplan d'équation $\{f = \alpha\}$. On dit $\mathcal{H}$ simplement **hyperplan** ssi $\mathcal{H}$ est le noyau de f.

2.2.8 Lemme : Caractérisation des hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{H} \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Alors, les suivantes sont équivalents :

1. Il existe un sous-espace vectoriel $V \subseteq E$ de dimension 1 tel que $E = V \oplus \mathcal{H}$.
2. $\mathcal{H}$ est un hyperplan.

Preuve :

1 ⇒ 2 : Soit $v \in V \setminus \{0\}$ quelconque, fixé. Définissons sur E la forme linéaire

$$f : E \to \mathbb{K} \quad , \quad \lambda v + h \mapsto \lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{K},\ h \in \mathcal{H} \quad .$$

Alors, $\mathcal{H} = \{f = 0\}$.

2 ⇒ 1 : Comme $\mathcal{H}$ est le noyau d'une forme linéaire $0 \neq f : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$, on sait que $\mathbb{K} \cong E/\mathcal{H}$. Comme $\mathbb{K}$ est de dimension 1, on sait que $\mathcal{H}$ possède un supplémentaire V de dimension 1.

□

2.2.9 Lemme : Unicité de représentations d'un hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'équation $\{f = \alpha\}$ et d'équation $\{g = \beta\}$. Alors, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ telle que $g = \lambda f$ et $\beta = \lambda\alpha$.

Preuve : Comme $f \neq 0$ on sait que $\mathcal{H}$ est non-vide. Choisissons un $x_0 \in \mathcal{H}$ fixé, alors

$$\mathcal{H} - x_0 = \{x \in E : f(x) = \alpha - f(x_0)\} = \{f = 0\} \quad ,$$

et de même $\mathcal{H} - x_0 = \{g = 0\}$, c'est-à-dire $\{f = 0\} = \{g = 0\}$. Donc par 2.2.8, on sait que $E = V \oplus \{f = 0\} = V \oplus \{g = 0\}$ pour un sous-espace $V \subseteq E$ de dimension 1. En représentant tout $x \in E$ comme somme unique $x = v + h$ avec $v \in V$ et $h \in \{f = 0\}$, on sait que $f(x) = f(v)$ et $g(x) = g(v)$. Or, les restrictions $f\big|_V$, $g\big|_V$ sont formes linéaires non-triviales sur V qui est de dimension 1, donc $g\big|_V = \lambda f\big|_V$ pour une constante $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Donc en fait $g = \lambda f$. De $f(x_0) = \alpha$ et $\lambda f(x_0) = g(x_0) = \beta$, on conclut que $\beta = \lambda\alpha$.

□

2.2.10 Lemme : Fermeture d'hyperplans affines

Soit E un $\mathbb{R}$-espace linéaire normé, $f : E \to \mathbb{R}$ linéaire non-triviale et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, pour l'hyperplan affine $\mathcal{H} = \{f = \alpha\}$ les suivants sont équivalents :

1. La forme linéaire f est continue.
2. $\mathcal{H}$ est fermé.
3. $\mathcal{H}$ n'est pas dense dans E.

Preuve :

1 ⇒ 2 : Trivial.

2 ⇒ 3 : Comme par définition $f \neq 0$, on sait que $\mathcal{H} \neq E$. Comme $\mathcal{H}$ est fermé, il est égal à son fermeture, qui est inégal à E. Donc, $\mathcal{H}$ n'est pas dense dans E.

3 ⇒ 1 : Comme $\mathcal{H}$ n'est pas dense dans E, il existe une boule $B_r(x_0) \subseteq \mathcal{H}^c$ de rayon $r > 0$, centrée à $x_0 \in \mathcal{H}^c$. Supposons sans perdu de généralité que $f(x_0) < \alpha$.

Alors, $f(x) < \alpha$ pour tout $x \in B_r(x_o)$, car sinon il existerait un $x_1 \in B_r(x_0)$ tel que $f(x_1) > \alpha$. L'application

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \gamma(t) := f(tx_0 + (1-t)x_1)$$

est continue, comme elle est affine entre espaces de dimension finie. Donc, l'image $\gamma([0,1])$ doit être connexe. Comme $B_r(x_0)$ est convexe, la partie $[x_0, x_1] := \{tx_0 + (1-t)x_1 : t \in [0,1]\}$ se trouve complètement dans

$B_r(x_0)$. Par supposition à la boule, $\gamma([0,1]) = f([x_0,x_1]) \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$, c'est-à-dire $f(\gamma(0)) < \alpha$ et $f(\gamma(1)) > \alpha$ serait une contradiction.
Donc $f(x_0 + rz) < \alpha$ pour tout $z \in B_1(0)$, et par conséquence

$$f(z) \leq \frac{\alpha - f(x_0)}{r} \quad \forall z \in B_1(0) \quad ,$$

c'est-à-dire f est bornée.

□

2.2.11 Lemme : Norme de formes linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace normé et $\mathcal{H}$ le noyau d'une $0 \neq f \in E'$. Soit $x_0 \notin \mathcal{H}$ quelconque. Alors $E = \mathcal{H} \oplus \mathbb{K}x_0$ et

$$\|f\| = \frac{|f(x_0)|}{d(x_0,\mathcal{H})} \quad .$$

Preuve : Tout $x \in E$ est de la forme $y + \lambda x_0$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $y \in \mathcal{H}$ ssi

$$\lambda = \frac{f(x)}{f(x_0)} \quad , \quad y = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} \cdot x_0 \quad ,$$

c'est-à-dire $E = \mathcal{H} \oplus \mathbb{K}x_0$. Comme $\mathcal{H}$ est fermé, il faut $d(x_0,\mathcal{H}) > 0$. De plus

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{K},\ y\in\mathcal{H} \\ y+\lambda x_0\neq 0}} \frac{|f(y+\lambda x_0)|}{\|y+\lambda x_0\|} = \sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{K},\ y\in\mathcal{H} \\ y+\lambda x_0\neq 0}} \frac{|\lambda \cdot f(x_0)|}{\|y+\lambda x_0\|} = \sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{K}\backslash\{0\} \\ y\in\mathcal{H} \\ y+\lambda x_0\neq 0}} \frac{|f(x_0)|}{\|\frac{y}{\lambda} + x_0\|}$$

$$= \frac{|f(x_0)|}{\inf_{y\in\mathcal{H}} \|x_0 - y\|} = \frac{|f(x_0)|}{d(x_0,\mathcal{H})} \quad .$$

□

Cas spécial : Considérons un hyperplan fermé $\mathcal{H}$ dans un espace de Hilbert $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, définie par $\mathcal{H} = \{a\}^\perp$ pour un vecteur $a \in E \setminus \{0\}$ fixé. Noter que a induit sur E une forme linéaire continue par $x \mapsto \langle a,x\rangle$ de norme $\|\langle a,\cdot\rangle\| = \|a\|$. Alors, par lemme 2.2.11 pour tout vecteur $x \in E$ on a

$$d(x,\mathcal{H}) = \frac{|\langle a,x\rangle|}{\|a\|} \quad .$$

Si par exemple $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{a} = (a_1,..,a_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$d\big(\mathbf{x}, \{\mathbf{a}\}^\perp\big) = \frac{|a_1x_1 + .. + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + .. + a_n^2}}$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

2.2.12 Definition: Séparation par hyperplans affines

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $A, B \subseteq E$ quelconques. On dit que l'hyperplan affine $\mathcal{H}$ d'équation $\{f = \alpha\}$ **sépare au sens large** A et B si :
- $f(x) \leq \alpha$ pour tout $x \in A$,
- $f(y) \geq \alpha$ pour tout $x \in B$,

(ou vice-versa). On dit que $\mathcal{H}$ **sépare** A et B au **sens stricte** s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que
- $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$ pour tout $x \in A$,
- $f(x) \geq \alpha + \varepsilon$ pour tout $x \in B$,

(ou vice versa). Noter que par 2.2.9 ces définitions sont indépendants de l'équation $\{f = \alpha\}$ de l'hyperplan.

Remarques : Soit E un $\mathbb{R}$-espace linéaire normé.

(i) Si on appelle les ensembles $\{f < \alpha\}$ et $\{f > \alpha\}$ les **deux côtés** de $\mathcal{H}$, alors par 2.2.9 ils sont bien définies d'ordre près, c'est-à-dire indépendants de l'équation $\{f = \alpha\}$ de $\mathcal{H}$ d'ordre près.

(ii) Si $\mathcal{H}$ est fermé, alors par 2.2.10 les deux côtes de l'hyperplan affine $\mathcal{H}$ sont des ouverts convexes, disjoints. Leurs fermetures sont donnés par $\{f \leq \alpha\}$ et $\{f \geq \alpha\}$ respectivement et sont eux mêmes fermés, convexes.

(iii) On dit toute côté ouverte/fermée d'un hyperplan affine fermé un **demi-espace ouvert/fermé**.

(iv) Deux ensembles $A, B \subseteq E$ sont donc séparés en large par un hyperplan affine fermé $\mathcal{H}$ ssi chacune se trouve dans la fermeture d'une côté de $\mathcal{H}$ différente.

2.2.13 Lemme : Jauge d'un convexe

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $C \subseteq E$ un convexe ouvert contenant 0. Pour tout $x \in E$ on pose

$$p(x) := \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$$

et appelle $p : E \to \mathbb{R}_+$ **jauge** de la convexe C. Alors :

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et $x \in E$.
2. Il existe un $M > 0$ tel que $0 \leq p(x) \leq M \cdot \|x\|$ pour tout $x \in E$.
3. $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$.
4. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$.

Preuve :

1. Trivial.
2. Il existe un $r > 0$ tel que $B_r(0) \subseteq C$. Alors
$$r \cdot \frac{x}{\|x\|} \in C \quad \forall x \in E \setminus \{0\}$$
et donc
$$p(x) \leq \frac{\|x\|}{r} \quad \forall x \in E \setminus \{0\} \quad .$$
3. Soit $x \in C$. Comme C est ouvert, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x \in C$. Donc $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Réciproquement, supposons que $p(x) < 1$, alors il existe $\alpha \in (0,1)$ tel que $\alpha^{-1}x \in C$. Donc
$$x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha) \cdot 0 \in C$$
par convexité.
4. Pour $x, y \in E$ et $\varepsilon > 0$ posons
$$\xi := \frac{x}{p(x)+\varepsilon} \quad , \quad \zeta := \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \quad ,$$
alors $\xi, \zeta \in C$ et $p(\xi) < 1,\ p(\zeta) < 1$. Comme C est convexe, pour tout $t \in [0,1]$ on a $t\xi + (1-t)\zeta \in C$. Prenons
$$t_0 := \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in [0,1] \quad ,$$
alors
$$C \ni t_0\xi + (1-t_0)\zeta = \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \quad .$$
En appliquant (1) et (3) on obtient
$$p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad ,$$
d'où
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad .$$

□

2.2.14 Lemme : Séparation de convexes et points

Soit E un $\mathbb{R}$-espace linéaire vectoriel normé. Soient $C \subseteq E$ un convexe, ouvert non-vide et $x_0 \in E \setminus C$. Alors, il existe une forme linéaire continue $f \in E'$ telle que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$.

Preuve : On suppose par translation que $0 \in C$. On pose $V := \mathbb{R}x_0$ et définit la forme linéaire

$$g : V \to \mathbb{R} \quad , \quad \lambda x_0 \mapsto \lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad .$$

Soit $p : E \to \mathbb{R}_+$ le jauge de la convexe C, comme définit dans 2.2.13. Alors $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in V$:
• Si $t \leq 0$ alors $g(tx_0) = t \leq 0 \leq p(tx_0)$.
• Si $t > 0$ alors $g(tx_0) = t \leq t \cdot p(x_0) = p(tx_0)$ d'après 2.2.13(3).
En appliquant le théorème de Hahn-Banach 2.2.3 on trouve une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ prolongeant g sur E telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$. Par 2.2.13(2) il existe un $M > 0$ tel que $f(x) \leq M \cdot \|x\| \ \forall x \in E$, c'est-à-dire f est continue. De plus, $f(x_0) = g(x_0) = 1$ et $f(x) \leq p(x) < 1$ pour tout $x \in C$ d'après 2.2.13(3). Donc $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$.

□

2.2.15 Théorème de Hahn-Banach : Séparation large de convexes

Soit E un $\mathbb{R}$-espace normé et $A, B \subseteq E$ deux ensembles non-vides, disjoints et convexes de E. On suppose que A est ouvert. Alors, il existe un hyperplan affine fermé $\mathcal{H}$ qui sépare A et B au sens large.

Preuve : On considère l'ensemble $C := A - B = \bigcup_{b \in B}(A - b)$. Alors, C est convexe, ouvert et ne contient pas l'origine 0 car $A \cap B = \emptyset$. Par lemme 2.2.14 appliqué à C et 0, il existe $f \in E'$ tel que $f(a - b) < f(0)$ pour tout $a \in A,\ b \in B$, c'est-à-dire

$$f(a) < f(b) \quad \forall a \in A,\ b \in B \quad .$$

En prenant $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{a \in A} f(a) \leq \alpha \leq \inf_{b \in B} f(b)$$

on a

$$f(a) \leq \alpha \leq f(b) \quad \forall a \in A,\ b \in B \quad .$$

□

2.2.16 Théorème de Hahn-Banach : Séparation stricte de convexes

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $A, B \subseteq E$ deux convexes, disjoints et non-vides. On suppose que A est fermé et B compact. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Preuve : Pour $\varepsilon > 0$ on pose

$$A_\varepsilon := A + B^o_\varepsilon(0) = \bigcup_{a \in A} B^o_\varepsilon(a) \quad ,$$

appelé **ε-voisinage de** A. De même, on définit B_ε. Alors, $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ sont convexes, ouverts non-vides. De plus, par A.3.1 on sait que $d(A, B) > 0$, donc pour $\varepsilon > 0$ assez petit A_ε et B_ε sont disjoints. Supposons donc $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$. On applique théorème 2.2.15 à $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ et trouve une $0 \neq f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que

$$\underbrace{f(a + \varepsilon z)}_{f(a) + \varepsilon f(z)} \leq \alpha \leq \underbrace{f(b + \varepsilon \tilde{z})}_{f(b) + \varepsilon f(\tilde{z})} \quad \forall a \in A, b \in B,\ z, \tilde{z} \in B^o_1(0) \quad .$$

Donc

$$f(a) + \varepsilon \|f\| \leq \alpha \leq f(b) - \varepsilon \|f\| \quad \forall a \in A, b \in B \quad ,$$

c'est-à-dire $\{f = \alpha\}$ sépare A, B strictement.

□

2.2.17 Corollaire : Caractérisation de la densité de sous-espaces

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Alors, les suivantes sont équivalents :

1. V est dense dans E.
2. Toute $f \in E'$ nulle sur V, est nulle sur tout E.

Preuve :

1 $\Rightarrow$ 2 **:** Trivial.

2 $\Rightarrow$ 1 **:** Supposons que V n'est pas dense dans E. Choisissons $x_0 \in E \setminus \overline{V}$, où $\overline{V} \neq E$ est la fermeture de V. On applique le théorème 2.2.16 au fermé $\overline{V}$ au compact $\{x_0\}$ pour trouver une $0 \neq f \in E'$ telle que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in V$. Alors, en fait $f(x) = 0$ pour tout $x \in V$ car sinon $f(V) = \mathbb{R}$, une contradiction.

□

2.2.18 Corollaire : Caractérisation des convexes fermés

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Alors, une partie $C \subseteq E$ est convexe, fermée ssi elle est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Preuve : Direction "$\Leftarrow$" est trivial comme tout demi-espace fermé est convexe. Supposons que $C \subseteq E$ est une partie convexe fermée. Notons $\mathfrak{D}$ l'ensemble des demi-espaces fermés contenant C. Alors évidement $C \subseteq \bigcap_{D \in \mathfrak{D}} D$. Il reste donc à montrer que $C^c \subseteq \bigcup_{D \in \mathfrak{D}} D^c$.
Soit $x_0 \in C^c$ n'importante quel, alors par théorème 2.2.16 il existe un hyperplan affine $\mathcal{H} = \{f = \alpha\}$ fermé qui sépare C et $\{x_0\}$ en façon stricte. En particulier, C et x_0 se trouvent dans deux demi-espaces ouverts disjoints, c'est-à-dire $C \subseteq D$ et $x_0 \notin D$ pour un demi-espace D fermé.

□

2.2.19 Exemple : Le dual de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions lisses $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de support compact. Alors :

1. Il n'existe pas de fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int\limits_{\mathbb{R}^n} g \cdot f \, d\lambda^n = f(0)$ pour toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. Il existe une forme linéaire continue $\delta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)'$ telle que $\delta_0(f) = f(0)$ pour toute $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n)$.
3. La forme linéaire δ_0 n'est pas représentable par $L^1(\mathbb{R}^n)$. En particulier, $L^1(\mathbb{R}^n)$ est strictement plus petit que le dual de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Remarque : Par remarque 1.1.2(ii) on peut considérer $(\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ plongé isométriquement dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. De plus, par 1.4.1, l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$ est isométriquement plongé dans le dual de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ via l'association $g \mapsto \big(f \mapsto \int fg\big)$.

Preuve :

1. Supposons que $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est une telle fonction. Choisissons une densité de probabilité $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et posons
$$\Phi_k(x) := k^n \cdot \Phi(kx) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$
pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors, $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est par 1.7.2 une approximation de Dirac δ_0 lisse et de support compact sur $\mathbb{R}^n$. Par conséquence, par 1.7.7 on sait que $\Phi_k * g \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} g$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Par théorème 1.5.4, $(\Phi_k * g)_k$ possède une sous-suite qui converge vers g μ-presque partout. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a
$$(\Phi_k * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(x-y) g(y) \, dy = \Phi_k(x) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
car $\Phi_k(x - \cdot) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Par construction, pour tout $\varepsilon > 0$, $\operatorname{supp} \Phi_k \subseteq B_\varepsilon^o(0)$ pour k assez grand. Donc $\Phi_k * g \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ponctuellement dehors $\{0\}$. Donc, $g = 0$ presque partout.

2. On sait que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que l'application $\delta_0 : f \mapsto f(0)$ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. Par Hahn-Banach, δ_0 peut être prolongée sur tout l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ comme forme linéaire continue.
3. Suit de (1) et (2).

□

2.3 Le théorème de Banach-Steinhaus

2.3.1 Théorème de Baire

Tout espace métrique complet (X, d) est de Baire, c'est à dire, toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Remarques

(i) En pratique, on considère des fermés $(X_n)_{i \in I}$ de X tels que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$. Alors, par 2.3.1 il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que X_n est d'intérieur non-vide.

(ii) Dans un espace topologique X, un sous-ensemble $D \subseteq X$ est d'intérieur vide ssi D^c est dense dans X.

(iii) Donc, une version équivalente du théorème de Baire est : Toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans (X, d) est encore dense dans (X, d).

Preuve : Soient $U_1, U_2, .. \subseteq X$ ouverts denses dans X. On va montrer que leur intersection $U := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est encore dense dans X. Soit $\emptyset \neq \Omega \subseteq X$ un ouvert, alors il existe par densité de l'ouvert U_1 une boule $B_{r_1}(x_1) \subseteq U_1 \cap \Omega$ avec $0 < r_1 \leq \frac{1}{2}$. Par densité de U_2, il existe une boule $B_{r_2}(x_2) \subseteq B_{r_1}(x_1) \cap U_2$ avec $0 < r_2 \leq \frac{1}{2^2}$. De même façon on obtient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (0, \infty)$ tels que

$$B_{r_n}(x_n) \subseteq B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \cap U_n \quad \wedge \quad 0 < r_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Par conséquence, (x_n) est Cauchy et converge donc vers un $x \in X$. Comme $x_n \in B_{r_k}(x_k)$ pour tout $n \geq k$, la limite x se trouve dans toute boule $B_{r_k}(x_k)$. Donc, x se trouve dans chaque U_n et Ω, donc dans $U \cap \Omega$. Donc, $U \cap \Omega \neq \emptyset$.

□

2.3.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(L_i)_{i\in I}$ une famille des applications linéaires continues de E dans F. Si $(L_i)_{i\in L}$ est **ponctuellement bornée**, c'est-à-dire

$$\sup_{i\in I} \|L_i(x)\| < \infty \quad \forall \, x \in E \ ,$$

alors $(L_i)_{i\in I}$ est uniformément bornée, c'est-à-dire

$$\sup_{i\in I} \|L_i\| < \infty \ .$$

Preuve : Considérons les ensembles

$$A_n := \bigcap_{i\in I} \{x \in E : \|L_i(x)\| \leq n\} \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Comme intersections de fermés, les A_n sont eux mêmes fermés. Car $(L_i)_{i\in I}$ est ponctuellement bornée on a $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Comme E n'est pas d'intérieur vide, par le théorème de Baire 2.3.1 il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que A_{n_0} ne soit pas d'intérieur vide. Donc, il existe $x_0 \in A_{n_0}$ et $r > 0$ tels que $B_r(x_0) \subseteq A_{n_0}$.
Soit $x \in E$ avec $\|x\| \leq 1$, alors pour tout $i \in I$ on a

$$\|L_i(x)\| = \frac{1}{r}\|L_i(rx)\| \leq \frac{1}{r}\|L_i(x_0)\| + \frac{1}{r}\|L_i(x_0 + rx)\| \leq \frac{n_0}{r} + \frac{n_0}{r} \ ,$$

c'est-à-dire $\sup_{i \in I} \|L_i\| \leq 2\frac{n_0}{r}$.

□

2.3.3 Corollaire de Banach-Steinhaus sur opérateurs linéaires continues

Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des applications linéaires continues de E dans F tels que pour tout $x \in E$ la suite $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F vers un élément, noté $L(x)$. Alors :

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\| < \infty$.
2. L'application $x \mapsto L(x) = \lim_{n\to\infty} L_n(x)$ de E dans F est linéaire et continue avec norme

$$\|L\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|L_n\| \quad . \tag{2.3.3.1}$$

Noter que l'inégalité ci-dessus n'est pas forcement une égalité. Voir 2.3.4 pour un exemple.

Noter que la complétude de E est vraiment nécessaire, comme les exemples 2.3.5 et 2.3.6 montrent.

Preuve :

1. Comme pour tout $x \in E$ la suite $L_n x$ converge dans F, elle est bornée. Donc, par Banach-Steinhaus 2.3.2 on a
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\| < \infty \quad .$$
2. Évidement $x \mapsto L(x)$ est linéaire. De plus
$$\|Lx\| = \lim_{n\to\infty} \|L_n x\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|L_n\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E \quad ,$$
c'est-à-dire
$$\|L\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|L_n\| \quad .$$

□

2.3.4 Exemple : Convergence des coefficients de Fourier

Considérons le $\mathbb{C}$-espace de Banach $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions 2π-périodiques, réelles, continues. Considérons sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ la suite des formes linéaires continues $\mathcal{F}_n : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C}$, définies par

$$\mathcal{F}_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \quad , \quad f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \; n \in \mathbb{N}$$

Par 3.1.8 on sait que la suite $(\mathcal{F}_n(f))_n$ converge vers 0 pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Pour $e_n := \left(t \mapsto e^{int}\right) \in \mathcal{C}_{2\pi}$ on a $|\mathcal{F}_n(e_n)| = 1 = \|e_n\|_\infty$, donc $\|\mathcal{F}_n\| \geq 1$. Donc

$$\varliminf_{n\to\infty} \|\mathcal{F}_n\| \geq 1 \neq 0 = \left\| \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n \right\| \quad ,$$

ce qui montre que l'inégalité (2.3.3.1) n'est pas forcement une égalité.

2.3.5 Contre-exemple : La distribution de Dirac sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ des fonctions complexes, continues sur $\mathbb{R}$ de support compact. Noter que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ n'est pas complet. On munit $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$, alors l'application

$$\delta_0 : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \quad , \quad f \mapsto f(0)$$

est une forme linéaire <u>non-continue</u> sur $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ notons

$$l_n(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \frac{n}{2} 1_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)\ dx = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x)\ dx \quad ,$$

appelé la *valeur moyenne de f sur* $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. On vérifie que les $(l_n)_n$ sont formes linéaires continues[7] sur $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. On vérifie de plus qu'ils sont induit par une approximation de Dirac δ_0 sur $\mathbb{R}$ de support compact. Alors, par 1.7.4(2) on sait que $l_n(f) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0)$ pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Donc, les $(l_n)_n$ convergent ponctuellement vers δ_0, même si δ_0 n'est pas continue. En considérant les hypothèses du théorème 2.3.3, on voit que cette *contradiction* se passe grâce à la non-completitude de $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

□

2.3.6 Contre-exemple : L'intégration sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$

On considère $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Noter que $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet. Alors, les formes linéaires continues $L_n : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ données par

$$L_n : f \mapsto \int_{-n}^{n} f(x)\ dx \quad , \quad f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$$

convergent ponctuellement vers la forme linéaire

$$L : f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx \quad , \quad f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \quad ,$$

qui lui même n'est pas continue. En considérant les hypothèses du théorème 2.3.3, on voit que cette *contradiction* se passe grâce à la non-completitude de $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

2.3.7 Corollaire de Banach-Steinhaus sur vecteurs

Soit E un espace normé avec le dual topologique E'. Soit $(x_i)_{i\in I} \subseteq E$ une famille de vecteurs tels que

$$\sup_{i\in I} \|Lx_i\| < \infty \quad \forall L \in E' \quad .$$

Alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est bornée dans E.

Preuve : Tout $x \in E$ induit sur E' une forme linéaire continue via le plongement canonique (voir 2.4.6). Comme on sait, le dual E' de E est un espace de Banach. Donc on peut appliquer théorème 2.3.2 pour montrer que $(x_i)_{i\in I}$ est bornée par rapport à leur norme d'opérateur dans E''. Par 2.4.7 $(x_i)_{i\in I}$ est aussi bornée par rapport à la norme de E.

□

2.3.8 Corollaire : Caractérisation de la continuité des applications

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces normés et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors, T est continue ssi pour tout $a \in F'$ on a $a \circ T \in E'$.

Preuve : Direction "$\Rightarrow$" est triviale. Supposons que pour toute $a \in F'$ on a $a(T) \in E'$. Alors, pour montrer que T est continue, il suffit de montrer que l'image $T(B_1(0))$ de la boule unité de E est bornée dans F. Par Banach-Steinhaus 2.3.7 il suffit de montrer que l'image $a(T(B_1(0)))$ est bornée pour toute $a \in F'$. Mais cela suit directement de l'hypothèse.

□

7. Dont la norme tend vers infini.

2.4 Convergence faible

2.4.1 Definition: Convergence forte, faible

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace normé ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) et E' son espace dual muni de la norme d'opérateurs

$$\|T\| := \sup_{0 \neq x \in E} \frac{|Tx|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |Tx| \quad .$$

On dit qu'une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ converge **fortement** vers $x \in E$ ssi $\|x - x_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et on note $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. On dit que (x_n) converge **faiblement** vers x ssi $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx \quad \forall T \in E'$ et on note $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$. Noter que convergence forte implique convergence faible.

2.4.2 La topologie faible

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, normé. Alors, la **topologie faible** sur E, noté $\mathscr{T}(E, E')$ est la plus petite topologie, pour laquelle tout $f \in E'$ reste continue. Noter que $\mathscr{T}(E, E')$ est une sous-topologie de la topologie forte de E. Si $\mathscr{O}(\mathbb{K})$ est la topologie naturelle de $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, alors le système

$$\bigcup_{f \in E'} \underbrace{\bigcup_{U \in \mathscr{O}(\mathbb{K})} \{f^{-1}(U)\}}_{f^{-1}(\mathscr{O}(\mathbb{K}))} \quad , \tag{2.4.2.1}$$

est une sous-base de $\mathscr{T}(E, E')$. Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{K}$ dense dans $\mathbb{K}$, $R \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ dense dans $\mathbb{R}_{>0}$. Comme les boules ouvertes de rayon dans R et centre dans Λ forment une base de $\mathscr{O}(\mathbb{K})$, tout élément du système (2.4.2.1) est union des éléments du système

$$\bigcup_{f \in E'} \bigcup_{r \in R} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{f^{-1}(B_r^o(\lambda))\} \quad , \tag{2.4.2.2}$$

d'où (2.4.2.2) donne une sous-base de $\mathscr{T}(E, E')$. Donc, le système des toutes intersections finies des éléments de (2.4.2.2) forme une base de $\mathscr{T}(E, E')$.

2.4.3 Lemme : Base de voisinages dans la topologie faible

Soit E un $\mathbb{K}$-espace normé et $\mathscr{T}(E, E')$ sa topologie faible. Soit $R \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ dense dans $R_{>0}$. Pour $x_0 \in E$ fixé, une base de voisinages de x_0 par rapport à $\mathscr{T}(E, E')$ est donnée par le système

$$\mathcal{B}_R(x_0) := \bigcup_{r \in R} \bigcup_{\substack{I \subseteq E' \\ |I| < \infty}} \left\{ \bigcap_{g \in I} g^{-1}(B_r^o(g(x_0))) \right\} \tag{2.4.3.1}$$

Preuve : Évidement, $\mathcal{B}_R(x_0) \subseteq \mathscr{T}(E, E')$. Par 2.4.2, il suffit de montrer que pour tous $f_1, .., f_n \in E'$, $\lambda_1, .., \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $r_1, .., r_n \in R$ tels que

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}\left(B_{r_k}^o(\lambda_k)\right) \quad ,$$

il existe $g_1, .., g_m \in E'$ et $r \in R$ tels que

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{m} g_k^{-1}\left(B_r^o(g_k(x_0))\right) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}\left(B_{r_k}^o(\lambda_k)\right) \quad .$$

Comme $f_k(x_0) \in B_{r_k}^o(\lambda_k)$ pour tout $k \in \{1, .., n\}$, il existe un rayon $r \in R$ tel que $B_r^o(f_k(x_0)) \subseteq B_{r_k}^o(\lambda_k)$ pour tout k. Si on pose $g_1 := f_1, .., g_n := f_n$, alors

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{m} \underbrace{g_k^{-1}\left(B_r^o(g_k(x_0))\right)}_{f_k^{-1}(B_r^o(f_k(x_0)))} \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}\left(B_{r_k}^o(\lambda_k)\right) \quad .$$

□

2.4.4 Lemme : Caractérisation de la convergence faible

Soit E un $\mathbb{K}$-espace normé et $\mathscr{T}(E,E')$ sa topologie faible. Alors, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ converge faiblement vers $x \in E$ ssi elle converge vers x dans $\mathscr{T}(E,E')$.

Preuve : Soit $R \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ dense dans $\mathbb{R}_{>0}$ et $\mathcal{B}_R(x)$ la base de voisinages de x dans $\mathscr{T}(E,E')$ donnée dans 2.4.3.

Direction "⇒" : Il suffit de montrer que, pour tout $U \in \mathcal{B}_R(x)$ presque toute la suite $(x_n)_n$ se trouve dans U. Soient $r > 0$ et $g_1, .., g_n \in E'$ tels que

$$x \in \underbrace{\bigcap_{k=1}^{n} g_k^{-1}\left(B_r^o(g_k(x))\right)}_{U} \quad .$$

Alors, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|g_k(x_n) - g_k(x)\| < r$ pour tout $k \in \{1, .., n\}$ et $n \geq n_0$. Donc, $x_n \in U$ pour tout $n \geq n_0$.

Direction "⇐" : Il faut montrer que pour tout $r \in R$ et $g \in E'$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $g(x_n) \in B_r^o(g(x))$ pour tout $n \geq n_0$. Mais comme $g^{-1}\left(B_r^o(g(x))\right) \in \mathcal{B}_R(x)$, cela suit de l'hypothèse.

□

2.4.5 Théorème sur la complétude d'un espace normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors les suivantes sont équivalents :

1. E est complet, ça veut dire toute suite de Cauchy converge.
2. Toute série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de vecteurs $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ normalement convergent pour $\|\cdot\|$ est convergente, c'est à dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \exists \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad .$$

Preuve :

1 ⇒ 2 : Soit $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq E$ telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty \quad .$$

Alors la suite $S_n := \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$ est Cauchy en $\mathbb{R}$ et pour $n \leq m \in \mathbb{N}$ on a

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| = |S_m - S_n| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ,$$

et par conséquence $\sum_{k=1}^{n} x_k$ est Cauchy en $(E, \|\cdot\|)$. Donc elle converge.

2 ⇒ 1 : Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ une suite de Cauchy. Alors il y a une sous suite (x_{n_k}) telle que $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| \leq 2^{-k}$. Donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < \infty$$

et le limite

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} - x_{n_0}$$

existe dans E. Nous avons donc trouvé une sous suite $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ qui converge. Car $(x_n)_n$ est Cauchy, elle converge entièrement.

□

2.4.6 Definition: Plongement canonique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace normé et E'' son espace **bidual**, ça veut dire le dual du dual E'. Alors, l'application linéaire

$$C_E : E \to E'' \quad , \quad C_E : x \mapsto (T \mapsto \langle T, x\rangle)$$

est dit le **plongement canonique** de E dans E''. Elle envoie chaque élément $x \in E$ à une forme linéaire $C_E x$ sur le dual E'', définie par $\langle C_E x, T\rangle := \langle T, x\rangle \,,\ T \in E'$. On appelle l'espace E **réflexif**, si son plongement canonique est surjectif.

2.4.7 Théorème : L'injectivité du plongement canonique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace normé. Alors son plongement canonique $C_E : E \to E''$ dans son bidual E'' est une isométrie.

Preuve : Par Hahn-Banach on a

$$\|C_E x\| = \sup_{\|T\|\leq 1} \| \underbrace{(C_E x)T}_{Tx} \| \overset{\text{H.B.}}{=} \|x\| \quad \forall\, x \in E$$

comme affirmé.

$\square$

Remarque : Car $C_E : E \to E''$ est isométrique, il est impérativement injectif. En particulier, pour $x \in E$ tel que $\langle T, x\rangle = 0 \ \forall T \in E'$, il faut $x = 0$.

2.4.8 Corollaire : Unicité de la limite faible

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors, toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ possède au plus un limite faible.

Preuve : Suppose que $x, y \in E$ sont tels que $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ et $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} y$. Ça implique que pour tout $T \in E'$ il faut $Tx = Ty$, c'est-à-dire $C_E x = C_E y$, où $C_E : E \to E''$ est le plongement canonique de E dans son bidual E''. Mais par 2.4.7 C_E est injectif, donc $x = y$.

$\square$

2.4.9 Lemme : Continuité faiblement inférieure de la norme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ est une suite qui converge faiblement vers $x \in E$, alors

$$\|x\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \quad .$$

Preuve : Par Hahn-Banach on sait que

$$\|x\| = \sup_{\substack{a\in E' \\ \|a\|=1}} |\langle a, x\rangle| \quad .$$

D'autre part, pour tout $a \in E'$ on a

$$|\langle a, x\rangle| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|\langle a, x_n\rangle|}_{\leq \|a\|\cdot\|x_n\|} \leq \|a\| \cdot \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \quad ,$$

donc

$$\|x\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \quad .$$

$\square$

2.4.10 Lemme : Caractérisation de la convergence faible

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et $D \subseteq E'$ dense dans l'espace dual E'. Alors, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ on a équivalence entre :

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in E$.
2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et pour tout $T \in D$ on a $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx$.

Preuve :

1 $\Rightarrow$ 2 **:** Évidement, il suffit de montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et bornée. Car pour tout $T \in E'$ la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, par Banach-Steinhaus 2.3.7 la famille $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée.

2 $\Rightarrow$ 1 **:** Soit $M := \max\{\|x\|, \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|\}$. Soit $T \in E'$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. Choisissons $T' \in D$ tel que $\|T - T'\| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|T'(x_n - x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n \geq n_0$, alors

$$|Tx_n - Tx| \leq |(T - T')(x_n - x)| + |T'(x_n - x)|$$

$$\leq \underbrace{\|T - T'\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3M}} \cdot \underbrace{\|x_n - x\|}_{\leq 2M} + \underbrace{|T'(x_n - x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}\ \forall n \geq n_0} \leq \varepsilon \quad \forall\ n \geq n_0$$

c'est-à-dire $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx$.

□

2.5 La convergence faible dans les espaces L^p

2.5.1 Lemme : Réflexivité des espaces L^p

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $1 < p < \infty$. Alors, l'espace $L^p(\mu)$ est réflexif.

Preuve : On va écrire L^p, L^q au lieu de $L^p(\mu), L^q(\mu)$. Soit $1 < q < \infty$ le conjugué de Hölder de p. Soit $\mathcal{T}^{(qp)} : L^q \to (L^p)'$ l'application qui envoie chaque $f \in L^q$ à la forme linéaire $\mathcal{T}_f := (h \mapsto \int fh\, d\mu)$. De même on définit $\mathcal{T}^{(pq)} : L^p \to (L^q)'$. Par 1.4.2 tous les deux $\mathcal{T}^{(qp)}$ et $\mathcal{T}^{(pq)}$ sont isomorphismes continues. Soit $\mathcal{T}_*^{(qp)} : (L^p)'' \to (L^q)'$ l'isomorphisme adjoint (voir A.2.2) de $\mathcal{T}^{(qp)}$, c'est-à-dire l'application qui envoie tout $L \in (L^p)''$ à $L \circ \mathcal{T}^{(qp)} \in (L^q)'$.
Alors, $\left((\mathcal{T}^{(qp)})^{-1}\right)_* \circ \mathcal{T}^{(pq)} : L^p \to (L^p)''$ est un isomorphisme et en fait égal au plongement canonique $C_{L^p} : L^p \to (L^p)''$. Pour le voir, considère $f \in L^p$ et $a \in (L^p)'$. Soit $g := (\mathcal{T}^{(qp)})^{-1}a$. Alors

$$\left[\left[\left((\mathcal{T}^{(qp)})^{-1}\right)_* \circ \mathcal{T}^{(pq)}\right](f)\right] a = \left[(\mathcal{T}^{(pq)}f) \circ (\mathcal{T}^{(qp)})^{-1}\right] a = \left[(\mathcal{T}^{(pq)}f) \circ (\mathcal{T}^{(qp)})^{-1} \circ \mathcal{T}^{(qp)}\right] g$$

$$= (\mathcal{T}^{(pq)}f)g = (\mathcal{T}^{(qp)}g)f = a(f) = (C_{L^p}(f))a \quad ,$$

ce qui prouve l'affirmation.

$$\begin{tikzcd}
L^p \arrow[r, "\mathcal{T}^{(pq)}"] \arrow[dr, "C_{L^p}"'] & (L^q)' \\
& (L^p)'' \arrow[u, "\mathcal{T}_*^{(qp)}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
L^q \arrow[d, "\mathcal{T}^{(qp)}"] \arrow[dr, "C_{L^q}"] & \\
(L^p)' & (L^q)'' \arrow[l, "\mathcal{T}_*^{(pq)}"']
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2: Sur la preuve de la réflexivité des espaces L^p pour $1 < p < \infty$. Tous les deux diagrammes commutent.

□

2.5.2 Théorème : L'injectivité du plongement canonique pour les espaces L^p

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugués de Hölder et $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré (σ-fini si $p = \infty$). Si $f \in L^p(\mu)$ est tel que

$$\mathcal{T}_g f := \int_\Omega g \cdot f \, d\mu = 0 \quad \forall\, g \in L^q(\mu) \quad , \tag{2.5.2.1}$$

alors $f = 0$ μ-presque partout.

Preuve :

Cas $1 < p < \infty$ **:** Soit $g := f^* \cdot |f|^{p-2}$, alors

$$\|g\|_q^q = \int |f|^{(p-1)q} \, d\mu = \|f\|_p^p < \infty$$

et donc $g \in L^q(\mu)$. De plus, par supposition on a

$$0 = \int gf \, d\mu = \|f\|_p^p$$

donc $f = 0$ μ-presque partout.

Cas $p = 1$ **:** Pose

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f^*(x)}{|f(x)|} & : f(x) \neq 0 \\ 0 & : f(x) = 0 \end{cases} ,$$

alors $g \in L^\infty(\mu)$ et $\mathcal{T}_g(f) = \|f\|_1$. Ça implique $f = 0$ μ-presque partout.

Cas $p = \infty$ **:** Soit μ σ-fini et $B_j \in \mathfrak{S}$ parties croisantes telles que $B_j \uparrow \Omega$ et $\mu(B_j) < \infty$ $\forall j$. Pose

$$g_j(x) := \begin{cases} \frac{f^*(x)}{|f(x)|} & : x \in B_j \cap \{f \neq 0\} \\ 0 & : \text{sinon} \end{cases} ,$$

alors $g_j \in L^1(\mu)$ et $T_{g_j} f = \left\| f\big|_{B_j} \right\|_1$ et donc par l'hypothèse (2.5.2.1) il faut $f\big|_{B_j} = 0$ μ-presque partout $\forall j$. Car les B_j recouvre tout Ω, il faut $f = 0$ μ-presque partout.

□

Remarque : Soit $\mathcal{T} : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))'$ l'application linéaire qui assigne à tout $g \in L^q(\mu)$ la forme linéaire $\mathcal{T}_g$. Soit $C_{L^p} : L^p(\mu) \to (L^p(\mu))''$ le plongement canonique de $L^p(\mu)$ dans son bidual. De plus, soit $R : (L^p(\mu))'' \to (\mathcal{T}(L^q(\mu)))'$ l'application linéaire qui envoie chaque $a \in (L^p(\mu))''$ à sa restriction sur $\mathcal{T}(L^q(\mu))$. Alors, le théorème ne dit rien autre que le fait que $R \circ C_{L^p} : L^p(\mu) \to (\mathcal{T}(L^q(\mu)))'$ est injective.

2.5.3 Corollaire sur la limite faible dans L^p

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$ conjugués de Hölder et $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré (σ-fini si $p = \infty$). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(\mu)$ une suite et $f, f' \in L^p(\mu)$ tels que

$$\mathcal{T}_g f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{T}_g f \quad , \quad \mathcal{T}_g f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{T}_g f' \quad \forall\, g \in L^q(\mu) \quad .$$

Alors, $f = f'$.

Preuve : Par supposition, pour tout $g \in L^q(\mu)$ il faut $\mathcal{T}_g(f - f') = 0$. Par 2.5.2 ça implique $f = f'$.

□

Remarque : Ce corollaire est un peu plus fort que 2.4.8, car l'identification du dual $(L^p(\mu))'$ par $L^q(\mu)$ marche seulement en certain cas (voir 1.4.2).

2.5.4 Théorème sur la continuité faible de la norme dans L^p

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré, $1 \leq p \leq \infty$ et $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L^p(\mu)$, $f \in L^p(\mu)$ tels que $f_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} f$. Alors :

1. Si $1 \leq p \leq \infty$, la norme $\|\cdot\|_p$ sur $L^p(\mu)$ est **faiblement inférieurement continue**, ça veut dire

$$\|f\|_p \leq \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p \quad .$$

2. Si $1 < p < \infty$ et si en plus $\|f_n\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_p$, alors $f_n \underset{\|\cdot\|_p}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f$.

Preuve :

1. Ce fait est déjà montré dans 2.4.9 pour des espaces normés généraux. On donne ici une preuve alternative, élémentaire pour les espaces $L^p(\mu)$ (μ σ-finie si $p = \infty$). Supposons $\|f\|_p \neq 0$ (sinon, l'inégalité est triviale).
   - On commence par le cas $1 \leq p < \infty$. On définit l'application linéaire

$$L(h) := \int_\Omega h \cdot \underbrace{f^* \, |f|^{p-2} \cdot 1_{f\neq 0}}_{F} \, d\mu \quad , \; h \in L^p(\mu) \quad ,$$

   alors $L \in (L^p(\mu))'$ et $Lf = \|f\|_p^p$. Alors

$$\|f\|_p^p = Lf = \lim_{n\to\infty} Lf_n \overset{\text{Hölder}}{\leq} \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p \underbrace{\|F\|_q}_{\|f\|_p^{p/q}} \qquad \Bigg| \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

   et donc $\|f\|_p \leq \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$.
   - Soit $p = \infty$ et μ σ-fini. Soit $\varepsilon > 0$ n'importante quel et pose

$$A_\varepsilon := \{|f| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \quad .$$

   Comme μ est σ-fini, on peut trouver des ensembles mesurables $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{S}$ tels que $A_\varepsilon \cap \Omega_n \uparrow A_\varepsilon$ et $\mu(A_\varepsilon \cap \Omega_n) < \infty \; \forall \, n$. On pose

$$g_{\varepsilon,n}(x) := \begin{cases} \frac{f^*(x)}{|f(x)|} & : x \in A_\varepsilon \cap B_n \\ \\ 0 & : \text{ailleurs} \end{cases} \quad ,$$

   alors $g_{\varepsilon,n} \in L^1(\mu)$ et donc $g_{\varepsilon,n} \in (L^\infty(\mu))'$ par 1.4.1. De plus

$$(\|f\|_\infty - \varepsilon) \cdot \mu(A_\varepsilon \cap \Omega_n) \leq \int_{A_\varepsilon \cap \Omega_n} |f| \; d\mu = \int_\Omega f \cdot g_{\varepsilon,n} \; d\mu \overset{f_k \rightharpoonup f}{=} \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \cdot g_{\varepsilon,n} \; d\mu \leq \varliminf_{k\to\infty} \|f_k\|_\infty \cdot \mu(A_\varepsilon \cap \Omega_n)$$

   Car $\mu(A_\varepsilon) > 0$, on a $0 < \mu(A_\varepsilon \cap B_n) < \infty$ pour n assez grand et donc

$$(\|f\|_\infty - \varepsilon) \leq \varliminf_{k\to\infty} \|f_k\|_\infty$$

   pour tout $\varepsilon > 0$, c'est à dire $\|f\|_\infty \leq \varliminf_{k\to\infty} \|f_k\|_\infty$.

2. Par l'inégalité triangulaire on a d'une part

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|f + f_n\|_p \leq \lim_{n\to\infty} \big(\|f\|_p + \|f_n\|_p \big) = 2 \, \|f\|_p$$

   et car $f_n + f \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} 2f$ d'autre part

$$2 \, \|f\|_p \leq \varliminf_{n\to\infty} \|f + f_n\|_p \quad ,$$

   donc

$$\lim_{n\to\infty} \|f + f_n\|_p = 2 \, \|f\|_p \quad . \tag{2.5.4.1}$$

Supposons $p \leq 2$ (l'autre cas est du même façon). Alors par Hanner 1.2.5

$$\left| \|f+f_n\|_p + \|f-f_n\|_p \right|^p + \left| \|f+f_n\|_p - \|f-f_n\|_p \right|^p \leq 2^p \cdot \left(\|f\|_p^p + \|f_n\|_p^p \right)$$

et donc d'après (2.5.4.1) :

$$\left| 2\|f\|_p + \lim_{n\to\infty} \|f-f_n\|_p \right|^p + \left| 2\|f\|_p - \lim_{n\to\infty} \|f-f_n\|_p \right|^p \leq 2^{p+1} \|f\|_p^p \quad .$$

La fonction $x \mapsto |a+x|^p$, $x \in \mathbb{R}$ est strictement convexe pour $1 < p < \infty$, donc $(a+x)^p + (a-x)^p \geq 2a^p$ avec égalité seulement pour $x = 0$. Cela implique $\lim_{n\to\infty} \|f-f_n\|_p = 0$.

□

2.5.5 Lemme : Caractérisation de la convergence faible dans L^p

Soient $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$ et $1 < q \leq \infty$ conjugues de Hölder et $D \subseteq L^q(\mu)$ dense dans $L^q(\mu)$. Alors, pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\mu)$ on a équivalence entre :

1. Pour toute $g \in L^q(\mu)$ on a $\int gf_n \, d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int gf \, d\mu$.
2. La famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\mu)$ et pour tout $g \in D$ on a $\int gf_n \, d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int gf \, d\mu$.
3. Si μ est σ-finie ou $1 < p < \infty$: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $f \in L^p(\mu)$.

Preuve : Si μ était σ-finie, par 1.4.2 on pourrait regarder $L^q(\mu)$ plongé isometricalement-isomorphiquement dans $(L^p(\mu))'$ et appliquer le lemme précédente 2.4.10. Pour garder la généralité de l'affirmation, on va prendre un autre chemin.

1 ⇒ 2 : Pour tout $g \in L^q(\mu)$ la famille $(\mathcal{T}_g f_n)_{n=1}^\infty$ est bornée dans $\mathbb{C}$. Alors, par 1.4.3 la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\mu)$.

2 ⇒ 1 : Soit $M := \max\left\{ \|f\|_p, \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p \right\}$. Soit $g \in L^q(\mu)$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. Choisit $g' \in D$ telle que $\|g-g'\|_q \leq \frac{\varepsilon}{3M}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|\mathcal{T}_{g'}(f_n - f)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n \geq n_0$, alors

$$|\mathcal{T}_g f_n - \mathcal{T}_g f| \leq |(\mathcal{T}_g - \mathcal{T}_{g'})(f_n - f)| + |\mathcal{T}_{g'}(f_n - f)|$$

$$\leq \underbrace{\|\mathcal{T}_g - \mathcal{T}_{g'}\|}_{\overset{(1.4.1)}{\leq} \|g-g'\|_q \leq \frac{\varepsilon}{3M}} \cdot \underbrace{\|f_n - f\|_p}_{\leq 2M} + \underbrace{|\mathcal{T}_{g'}(f_n - f)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3} \ \forall n \geq n_0} \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$$

c'est-à-dire $\mathcal{T}_g f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{T}_g f$.

3 ⇔ 1 : Par 1.4.2 on peut identifier l'espace dual $(L^p(\mu))'$ par l'espace $L^q(\mu)$ via l'isométrie $\mathcal{T} : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))'$.

□

2.5.6 Corollaire : Transfère de la convergence faible

Soient $1 < p < \infty$ et $1 \leq r \leq \infty$ quelconques, $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$ une suite de fonctions bornée dans $L^p(\mu)$. Alors, si $(f_n)_n$ converge faiblement dans $L^r(\mu)$ vers une $f \in L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$, elle converge faiblement vers f dans $L^p(\mu)$.

Preuve : Soit $1 < q < \infty$ la conjuguée de Hölder de p et $1 \leq s \leq \infty$ la conjuguée de Hölder de r. Par 2.5.5 il suffit de montrer que $\int f_n g \, d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int fg \, d\mu$ pour toute $g \in D$, où $D \subseteq L^q(\mu)$ soit dense dans $L^q(\mu)$. Choisissons $D := L^q(\mu) \cap L^s(\mu)$, qui par remarque 1.5.9(i) est dense dans $L^q(\mu)$. Alors, il suffit de montrer que $\int f_n g \, d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int fg \, d\mu$ pour toute $g \in L^s(\mu)$. Mais ça c'est donné car $(f_n)_n$ converge faiblement vers f dans $L^r(\mu)$.

□

2.5.7 Exemples de convergence faible dans les L^p

Soit $1 < p < \infty$ et $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ munit de la mesure de Lebesgue λ. Alors :

1. (Oscillations) La suite de fonctions $e_n : x \mapsto e^{i2\pi nx} \cdot 1_{[0,1]}(x)$ sur $\mathbb{R}$ converge faiblement mais pas fortement vers 0 dans $L^p(\lambda)$.
2. (Concentration) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ fixé avec $\|f\|_p > 0$. La suite de fonctions $u_n : x \mapsto \sqrt[p]{n} \cdot f(nx)$ sur $\mathbb{R}$ converge faiblement mais pas fortement vers 0 dans $L^p(\mathbb{R})$.
3. Le résultat (2) devient faux pour $p = 1$: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est une densité de probabilité et $u_n := nf(nx)$, alors pour toute $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on trouve $\int u_n g \; dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(0)$. Autrement dit, (u_n) converge faiblement* vers la distribution δ_0 sur $(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}))'$.
4. (Fuite à l'infini) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ fixé avec $\|f\|_p > 0$. Alors, la suite de fonctions $v_n : x \mapsto f(x-n)$ sur $\mathbb{R}$ converge faiblement mais pas fortement vers 0 dans $L^p(\mathbb{R})$.
5. (Étalement) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_p > 0$. Alors, la suite de fonctions $w_n : x \mapsto n^{-\frac{1}{p}} f(x/n)$ sur $\mathbb{R}$ converge faiblement mais pas fortement vers 0 dans $L^p(\mathbb{R})$.

Preuve : Soit $1 < q < \infty$ le conjugué de Hölder de p.

1. Car $\|e_n\|_p^p = \int_0^1 |e_n|^p \; d\lambda = 1$ la suite ne converge pas en $\|\cdot\|_p$ vers 0. Par la dualité 2.5.5, pour montrer la convergence faible il suffit de démontrer que $\int fg \; d\lambda \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $g \in D$ pour une sous-partie $D \subseteq L^q(\lambda)$ dense dans $L^q(\lambda)$. On choisit $D := \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\lambda)$ (voir 1.5.11).
   Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors
$$\int\limits_{\mathbb{R}} e_n \cdot g \; d\lambda = \int\limits_0^1 e^{i2\pi nx} g(x) \; dx = \frac{e^{2\pi inx}}{2\pi in} \cdot g(x)\Big|_{x=0}^1 - \frac{1}{2\pi in} \int_0^1 e^{2\pi inx} g'(x) \; dx$$
$$= \frac{1}{2\pi in}\left[g(1) - g(0) - \int_0^1 e^{2\pi inx} g'(x) \; dx\right]$$
   et par conséquence
$$\left|\int e_n \cdot g \; d\lambda\right| \leq \frac{1}{2\pi n}\Big[|g(1) - g(0)| - \underbrace{\int_0^1 |g'(x)| \; dx}_{\substack{<\infty \\ \text{car } g \in \mathcal{C}^1}}\Big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$
2. Car $\|u_n\|_p^p = \|f\|_p^p > 0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$, la suite ne converge pas vers 0 dans $L^p(\lambda)$. De même comme (1), pour la convergence faible il suffit de montrer que $\int u_n g \; dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $g \in L^q(\lambda) \cap L^\infty(\lambda)$ (voir 1.5.9(i)). Pour tout tel g, on écrit
$$\left|\int u_n g \; dx\right| \leq \int |u_n g| \; dx \leq \|u_n\|_1 \cdot \|g\|_\infty = n^{\frac{1}{p}-1} \|g\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
   et obtient $u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} 0$.
3. Pour tout $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on trouve
$$\lim_{n\to\infty} \int u_n g \; d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f(y) g\left(\tfrac{y}{n}\right) \; dy = \int f(y) \underbrace{\lim_{n\to\infty} g\left(\tfrac{y}{n}\right)}_{g(0)} \; dy = g(0) \int f(y) \; dy = g(0) \quad ,$$
   où on a utilisé le théorème de convergence dominée et le fait que
$$\left|f(\cdot) g\left(\tfrac{\cdot}{n}\right)\right| \leq |f(\cdot)| \cdot \|g\|_\infty \; \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall \; n \quad .$$
4. Évidement $\|v_n\|_p = \|f\|_p > 0$, donc $(v_n)_n$ ne converge pas fortement vers 0. De même comme dans (2), pour la convergence faible il suffit de montrer que $\int v_n g \; d\lambda \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout g dans une sous-partie dense dans $L^q(\mathbb{R})$. On choisit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ et note que
$$\int v_n g \; d\mu = \int f(y) g(y+n) \; dy \quad .$$

Or, pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $f(y)g(y+n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|f \cdot g(\cdot + n)|$ est majorée par l'intégrable $|f| \cdot \|g\|_\infty$. Donc, par Lebesgue on en déduit

$$\int v_n g \; d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

5. Comme $\|w_n\|_p = \|f\|_p > 1$ on sait que (w_n) ne converge pas fortement vers 0. De même comme ci-dessus, il suffit à montrer que $\int w_n g \; d\lambda \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour toute $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$. En fait

$$\left| \int w_n g \; d\lambda \right| \leq \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \int \left| f\left(\tfrac{x}{n}\right) \cdot g(x) \right| \; d\lambda \leq \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

□

2.6 Convergence faible*

2.6.1 Definition: Convergence faible*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé avec l'espace dual topologique E'. Alors, on dit que une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E'$ **converge faiblement*** vers $a \in E'$ ssi

$$\forall \; x \in E : \langle a_n, x\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle a, x\rangle \quad .$$

En ce cas on note $a_n \underset{\mathrm{w}^*}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} a$.

Remarques :

(i) Le limite faible* est évidement unique.

(ii) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E'$ converge fortement vers $a \in E'$, c'est-à-dire $\|a_n - a\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $a_n \underset{\mathrm{w}^*}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} a$.

(iii) Soit C_E le plongement canonique de E dans son bidual E'' (voir 2.4.6). Alors, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ converge faiblement vers $x \in E$ ssi $(C_E x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement* vers $C_E x$ dans E'' (comme formes linéaires sur E').

2.6.2 La topologie faible* sur l'espace dual

Soit E un $\mathbb{K}$-espace normé. Pour $x_1, .., x_n \in E$ fixés on peut définir sur E' les **demie-normes**

$$p_{x_1,..,x_n}(a) := \sup_{1\leq i\leq n} \|a(x_i)\| \quad , \quad a \in E'$$

qui satisfont l'équivalence

$$a_n \underset{\mathrm{w}^*}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} a \quad \Leftrightarrow \quad p_{x_1,..,x_n}(a_n - a) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\; \forall \; x_1, .., x_n \in E, \; n \in \mathbb{N}$$

pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E'$ et $a \in E'$. Ces demie-normes définissent sur E' la **topologie faible*** : Une sous-partie $U \subseteq E'$ est dit **faiblement* ouverte** si pour tout $a \in U$ il existe $x_1, .., x_n \in E$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$B^o_{\varepsilon;x_1,..,x_n}(a) := \{b \in E' : p_{x_1,..,x_n}(b-a) < \varepsilon\} \subseteq U \quad .$$

Cette topologie est compatible à la convergence faible*, c'est-à-dire

$$a_n \underset{\mathrm{w}^*}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \; a \in U \subseteq E' \text{ faiblement* ouverte} : a_n \in U \text{ pour } n \text{ assez grand} \quad .$$

Alternativement, on peut définir la topologie faible* comme la plus petite topologie telle que, pour tout $x \in E$ la forme biduale $C_E x : E' \to \mathbb{K}$ est continue. De même façon comme la topologie faible $\mathscr{T}(E, E')$ sur E, on note $\mathscr{T}(E', E)$ la topologie faible* sur E'. Noter que si E est réflexif, alors $\mathscr{T}(E', E) = \mathscr{T}(E', E'')$.

2.6.3 Lemme : Limites de suites de formes linéaires

Soient E un $\mathbb{K}$-espace normé, F un espace de Banach, $X \subseteq E$ dense dans E et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ une suite d'opérateurs linéaires continues bornée telle que $\exists \lim_{n\to\infty} a_n(x)$ pour tout $x \in X$. Alors, l'application

$$a : E \to F \quad , \quad a(x) := \lim_{n\to\infty} a_n(x) \quad , \quad x \in E$$

est bien définie et en fait une application linéaire continue de E dans F.

Preuve : Soit $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|$. Soit $y \in E$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit $x \in X$ tel que $\|y - x\| \leq \varepsilon/M$. Alors

$$\|a_n y - a_m y\| \leq \|a_n y - a_n x\| + \|a_n x - a_m x\| + \|a_m x - a_m y\|$$

$$\leq \underbrace{\|a_n\| \cdot \|y - x\|}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{|a_n x - a_m x|}_{\overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\|a_m\| \cdot \|x - y\|}_{\leq\varepsilon}$$

c'est-à-dire $(a_n y)_{n\in\mathbb{N}}$ est Cauchy dans F, donc convergente et $a(y)$ est bien définie. Évidement elle est linéaire. De plus

$$\|a(y)\| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\|a_n(y)\|}_{\leq\|a_n\|\cdot\|y\|} \leq M \cdot \|y\|$$

ça veut dire $a : E \to F$ est bornée avec norme $\|a\| \leq M$.

□

2.6.4 Théorème de Banach-Alaoglu : Version 01 sur espaces séparables

Soit E un $\mathbb{K}$-espace normé, séparable. Alors, la boule unité fermée $B_1(0_{E'}) := \{a \in E' : \|a\| \leq 1\}$ est faiblement* séquentiellement compacte. Autrement dit, toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E'$ bornée possède une suite faiblement* convergente.

Preuve : Soit $X := \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ dénombrable et dense dans E. Car la suite $(a_n)_n$ est bornée, il existe sous-ensembles $T_k \subseteq \mathbb{C}, \ k \in \mathbb{N}$ (séquentiellement) compactes tels que $a_n(x_k) \in T_k \ \ \forall\, k, n$. En considérant chaque a_n comme application $a_n : X \to \mathbb{C}, \ x_k \mapsto a_n(x_k) \in T_k$, on trouve par la procédure de diagonalisation de Cantor A.3.6 une sous-suite $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $\exists \lim_{j\to\infty} a_{n_j}(x_k) \ \forall k \in \mathbb{N}$. Par lemme 2.6.3 l'application

$$a : E \to \mathbb{K} \quad , \quad a(x) := \lim_{n\to\infty} a_n(x) \quad , \quad x \in E$$

est bien définie et une forme linéaire dans E'. En particulier, $a_n \underset{w^*}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} a$.

□

2.6.5 Théorème de Banach-Alaoglu : Version 02 sur espaces généraux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace normé. Alors, la boule unité fermée $B_1 := \{a \in E' : \|a\| \leq 1\}$ est faiblement* compacte.

Remarques

(i) La preuve générale utilise le théorème de Tychonov. On peut la trouver ici[1].

(ii) Noter qu'en général, la compacité et la compacité séquentielle ne sont pas équivalentes (sauf dans espaces métriques). En particulier, version 01 (voir 2.6.4) et version 02 du théorème de Banach-Alaoglu ne sont pas équivalents. En cas que E est séparable, on peut montrer que la topologie faible* <u>sur la boule unité</u> $B_1(0_{E'})$ est métrisable, d'où compacité faible* et compacité faible* séquentielle sont équivalents.

2.6.6 Théorème de Banach-Alaoglu : Version 03 sur espaces réflexifs

Soit E un espace normé, réflexif. Alors, toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ bornée possède une sous-suite faiblement convergente.

Preuve pour espaces séparables : Comme E est réflexif et séparable, son bidual E'' est aussi séparable. Donc, son dual E' est également [8]. Soit $C_E : E \to E''$ le plongement canonique de E dans son bidual E'' et $a_n := C_E x_n$. Alors, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E''$ est aussi bornée et possède par 2.6.4 une sous-suite $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ faiblement* convergente (comme formes linéaires sur E') vers un $a \in E''$. Car E est réflexif, il existe un $x \in E$ tel que $C_E x = a$ et par remarque 2.6.1(iii) la suite (x_{n_j}) converge faiblement vers x.

Pour le cas général, voir [4], III.3.7.

$\square$

Conclusion : Par lemme 2.5.1 tout espace L^p $(1 < p < \infty)$ est réflexif. Donc, toute suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ bornée possède une sous-suite faiblement convergente.

2.7 Espaces lisses et uniformément convexes

2.7.1 Definition: Espace lisse

Un $\mathbb{K}$-espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit **lisse** si la norme $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ est Gâteaux-dérivable (voir A.2.3) sur tout $E \setminus \{0\}$. Autrement dit, E est lisse ssi pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ on peut définir une forme $\mathbb{R}$-linéaire, continue $\delta_x \|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ par

$$\langle \delta_x \|\cdot\|\,,\ y\rangle := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \|x + ty\| = \lim_{t\to 0} \left[\frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}\right] \quad , \quad y \in E. \ ,$$

où on considère $t \in \mathbb{R}$.

Exemples :

(i) L'espace $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est lisse.

(ii) Tout espace de Hilbert est lisse. Voir 2.7.3.

(iii) Pour tout espace mesuré $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ et $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\mu)$ est lisse. Voir 2.7.5.

2.7.2 Lemme : Norme de la Gâteaux-dérivée de la norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace normé lisse et $\delta_x \|\cdot\|$ la Gâteaux-dérivée de la norme dans $x \in E\setminus\{0\}$. Alors, l'opérateur $\mathbb{R}$-linéaire [9] $\delta_x \|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ possède la norme 1.

Preuve : Pour $y \in E$ on a toujours $\big|\, \|x+ty\| - \|x\| \,\big| \le \|ty\|$ et donc $|\langle \delta_x \|\cdot\|\,, y\rangle| \le \|y\|$, ce qui implique $\big\|\delta_x \|\cdot\|\,\big\| \le 1$. D'autre part $\langle \delta_x \|\cdot\|\,, x\rangle = \|x\|$, donc $\big\|\delta_x \|\cdot\|\,\big\| = 1$.

$\square$

2.7.3 Lemme : Espaces de Hilbert comme espaces lisses

Tout espace de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est lisse.

8. On utilise le fait que si le dual d'un espace normé est séparable, l'espace est aussi séparable.
9. Où on considère l'espace E comme un espace $\mathbb{R}$-linéaire.

Preuve : Soient $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $y \in \mathcal{H}$ et $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Par construction de la norme on a

$$\|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\Re\{\langle x, y\rangle\} + t^2 \|y\|^2$$

et donc

$$\frac{1}{t}\left[\, \|x+ty\| - \|x\| \,\right] = \frac{\|x\|}{t}\left[\sqrt{1 + \Re\{\langle x, y\rangle\}\frac{2t}{\|x\|^2} + t^2\frac{\|y\|^2}{\|x\|^2}} - 1\right] \xrightarrow{t\to 0} \frac{1}{\|x\|}\cdot \Re\{\langle x, y\rangle\} \quad .$$

□

2.7.4 Lemme : Dérivées directionnelles du module dans $\mathbb{C}$

Soient $u, v \in \mathbb{C}$ et $1 < p < \infty$. Alors :

1. L'application $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \mu(t) := |u + tv|^p$ a la dérivée réelle

$$\left.\frac{d\mu}{dt}\right|_{t=t_0} = p\,|u + t_0 v|^{p-2} \cdot \left[|v|^2\, t_0 + \Re\{u^* \cdot v\}\right] \quad ,$$

   si $u \neq -t_0 v$ et $\left.\frac{d\mu}{dt}\right|_{t=t_0} = 0$ si $u = -t_0 v$. En particulier

$$\left.\frac{d\mu}{dt}\right|_{t=0} = p\,|u|^{p-2} \cdot \Re\{u^* \cdot v\}$$

   et l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{R},\ u \mapsto |u|^p$ est Gâteaux-dérivable pour tout $u \in \mathbb{C}$.
2. Son prolongement $\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \mu(z) := |u + zv|^p$ n'est pas généralement complexe-dérivable dans $z = 0$.
3. Pour $t \in [-1, 1]$ on a l'inégalité

$$\big|\, |u + tv|^p - |u|^p \,\big| \le p\left[\, |u| + |v| \,\right]^{p-1} |t| \cdot |v| \quad .$$

Preuve :

1. On considère les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ données par $g(t) := |u + tv|^2$ et $f(s) := s^{\frac{p}{2}}$. Alors

$$g(t) = |u|^2 + |tv|^2 + 2t\Re\{vu^*\} = g(t_0) + \left[2\,|v|^2\, t_0 + p\,|u|^{p-2}\,\Re\{u^* \cdot v\}\right](t - t_0) + |v|^2\,(t - t_0)^2$$

   et donc $\left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=t_0} = 2\,|v|^2\, t_0 + 2\Re\{vu^*\}$. Car $\left.\frac{df}{ds}\right|_{s>0} = \frac{p}{2}s^{\frac{p}{2}-1}$ on a pour $u \neq -t_0 v$

$$\left.\frac{d(f\circ g)}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{df}{ds}\right|_{s=g(t_0)}\left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=t_0} = p\,|u + t_0 v|^{p-2} \cdot \left[|v|^2\, t_0 + \Re\{u^* \cdot v\}\right]$$

   et pour $u = -t_0 v$ évidement

$$\left.\frac{d\mu}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} |v|^p \cdot |t - t_0|^p = 0 \quad .$$

2. Prendre par exemple $p = 2$. Alors

$$\mu(z) = |u + zv|^2 = |u|^2 + |zv|^2 + 2u^* zv + 2uv^* z^*$$

   et donc

$$\lim_{\mathbb{R}\ni t\to 0}\frac{\mu(t) - \mu(0)}{t} = 2\Re\{vu^*\} \quad , \quad \lim_{\mathbb{R}\ni t\to 0}\frac{\mu(it) - \mu(0)}{it} = 2\Im\{vu^*\} \quad ,$$

   c'est-à-dire $\mu(z)$ n'est pas complexe-dérivable dans $z = 0$.
3. Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ donnée par $h(u) := |u|^p$ et $\delta_u h$ sa Gâteaux-dérivation dans $u \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire

$$\delta_u h : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \quad , \quad (\delta_u h)(v) \overset{(1)}{=} p\,|u|^{p-2} \cdot \Re\{vu^*\} \quad .$$

Par l'inégalité des accroissements finis A.2.4 on sait que

$$\big|h(u+tv)-h(u)\big| \leq \sup_{z\in[u,u+tv]} \|\delta_z h\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{R})} \cdot \|tv\|_{\mathbb{C}}$$

avec

$$\|\delta_z h\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{R})} = \sup_{|v|\leq 1} \Big| p\,|z|^{p-2}\,\Re\{vz^*\}\Big| \leq p\,|z|^{p-1} \quad . \tag{2.7.4.1}$$

Noter que (2.7.4.1) reste vrai pour $z=0$. Donc

$$|h(u+tv)-h(u)| \leq \sup_{z\in[u,u+tv]} p\,|z|^{p-1}\cdot|tv| \overset{|t|\leq 1}{\leq} p\big[\,|u|+|v|\,\big]^{p-1}\cdot|tv| \quad .$$

□

2.7.5 Lemme : Les espaces L^p comme espaces lisses

Soit $(\Omega,\mathfrak{S},\mu)$ un espace mesuré et $1<p<\infty$. Alors, l'espace $L^p(\mu)$ est lisse.

Preuve : Soient $0\neq f\in L^p(\mu)$ et $g\in L^p(\mu)$ quelconques. Soit $1<q<\infty$ le conjugué de Hölder de p. Alors, pour tout $x\in\Omega,\ 0<|t|<1$ on a par lemme 2.7.4

$$\big|\,|f(x)+tg(x)|^p-|f(x)|^p\,\big| \overset{2.7.4(3)}{\leq} p\cdot\big[\,|f(x)|+|g(x)|\,\big]^{p-1}\cdot|g(x)|\cdot|t| =: |t|\cdot h(x) \quad .$$

Par Hölder 1.2.2, on sait que $h\in L^1(\mu)$ et donc par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|f+tg\|_p^p-\|f\|_p^p}{t} = \int \lim_{t\to 0}\frac{|f(x)+tg(x)|^p-|f(x)|^p}{t}\,d\mu(x) = p\int |f|^{p-2}\,\Re\{f^*\cdot g\}\,d\mu \quad . \tag{2.7.5.1}$$

Note que l'intégral au droite de (2.7.5.1) existe, car $|f|^{p-2}f\in L^q(\mu)$. Finalement, on trouve

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\underbrace{\|f+tg\|_p}_{\sqrt[p]{\|f+tg\|_p^p}} = \frac{1}{p}\,\|f\|_p^{1-p}\cdot\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\|f+tg\|_p^p = \|f\|_p^{1-p}\int |f|^{p-2}\cdot\Re\{f^*\cdot g\}\,d\mu \quad ,$$

ça veut dire, $L^p(\mu)$ est lisse.

□

2.7.6 Definition: Espace uniformément convexe

Un espace normé $(E,\|\cdot\|)$ est dit **uniformément convexe** ssi pour tout $\varepsilon>0$ on a

$$\delta(\varepsilon) := \inf\big\{1-\big\|\tfrac{x+y}{2}\big\| \ :\ \|x\|=\|y\|=1,\ \|x-y\|\geq\varepsilon\big\} > 0 \quad . \tag{2.7.6.1}$$

Il est dit **strictement convexe** si pour tout $x,y\in E$ distincts de norme 1 on a $\big\|\frac{x+y}{2}\big\|<1$.

Remarques :

(i) Tout espace uniformément convexe est strictement convexe.

(ii) La condition (2.7.6.1) est équivalente à

$$\delta_{x_0,r}(\varepsilon) := \inf\big\{r-\big\|\tfrac{x+y}{2}-x_0\big\| \ :\ \|x-x_0\|=\|y-x_0\|=r,\ \|x-y\|\geq\varepsilon\big\} > 0 \quad \forall\, x_0\in E,\ r>0$$

et expresse la notion que les boules dans E sont *rondes*.

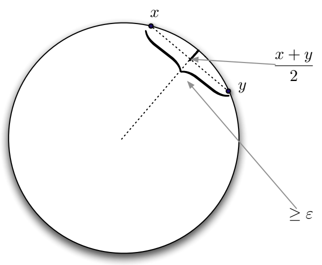

FIGURE 3: Sur l'interprétation de la convexité uniforme.

(iii) Soit E uniformément convexe. Soient $x_0 \in E$ et $r > 0$ quelconques. Alors, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \partial B_r(x_0)$ sont telles que $\left\|\frac{x_n+y_n}{2} - x_0\right\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} r$, alors $(x_n - y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemples :

(i) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ est uniformément convexe.

(ii) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ n'est pas uniformément convexe.

(iii) Tout espace de Hilbert est uniformément convexe (voir 2.7.8).

(iv) Pour $1 < p < \infty$ et espace mesuré $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$, l'espace $L^p(\mu)$ est uniformément convexe (voir 2.7.9).

(v) Tout sous-espace linéaire d'un espace uniformément convexe est également.

2.7.7 Caractérisation de la convexité uniforme pour certains espaces

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé dont le bord de la boule unité $\partial B_1(0)$ est compact. Alors, E est uniformément convexe ssi E est strictement convexe.

Preuve : Direction "$\Rightarrow$" est déjà donnée par remarque 2.7.6(i). Supposons E est strictement convexe. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On va montrer que

$$\sup\left\{\left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in \partial B_1(0),\ \|x-y\| \geq \varepsilon\right\} < 1 \quad . \tag{2.7.7.1}$$

L'application

$$f : E \times E \to \mathbb{R} \quad , \quad (x, y) \mapsto \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$$

est continue et l'ensemble

$$S_\varepsilon := \{x, y \in \partial B_1(0) : \|x - y\| \geq \varepsilon\} \subseteq E \times E$$

compact par hypothèse. Donc f atteint sur S_ε son maximum, qui est par convexité stricte strictement plus petit que 1. Donc le supremum (2.7.7.1) est strictement plus petit que 1.

□

2.7.8 Lemme : Convexité uniforme des espaces de Hilbert

Tout espace de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est uniformément convexe.

Preuve : Soient $x, y \in \mathcal{H}$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$. Par l'égalité du parallélogramme 1.2.5 on a

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4$$

et donc pour $\|x - y\| \geq \varepsilon$:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \sqrt{1 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2} \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

c'est-à-dire $\delta(\varepsilon) > 0$.

□

2.7.9 Lemme : Convexité uniforme des espaces L^p

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espace mesuré et $1 < p < \infty$. Alors, $L^p(\mu)$ est uniformément convexe.

Preuve : Pour $f, g \in L^p(\mu)$ tels que $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ on obtient par les inégalités de Clarkson 1.2.6

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{pn} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{pn} \leq 1$$

où $1 < q < \infty$ est le conjugué de Hölder de p et $n := \max\{1, q/p\}$. Donc, pour $\|f-g\|_p \geq \varepsilon$ il faut

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\| \leq \left[1 - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^{pn}\right]^{\frac{1}{pn}} \leq \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{pn}\right]^{\frac{1}{pn}}$$

c'est-à-dire $\delta(\varepsilon) > 0$ et $L^p(\mu)$ est uniformément convexe.

□

Remarque : Par ailleurs, $L^1(\mu), L^\infty(\mu)$ ne sont pas en général uniformément convexes. Comme exemple considère deux densités $f, g \in L^1(\mu)$ de probabilité. Alors $\frac{f+g}{2}$ est aussi une densité de probabilité et donc $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_1 = 1$, même si $\|f-g\|_1 \geq \varepsilon$. De même, suppose deux parties mesurables $A, B \in \mathfrak{S}$ tels que $\mu(A \triangle B) > 0$ et $\mu(A \cap B) > 0$. Alors $\|1_A\|_\infty = \|1_B\|_\infty = 1$, $\|1_A - 1_B\|_\infty = 1$ et $\left\|\frac{1_A + 1_B}{2}\right\|_\infty = 1$.

2.7.10 Lemme : Unicité des opérateurs maximisants

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace normé lisse et $x \in E \setminus \{0\}$. Alors, il existe un unique opérateur $T \in E'$ tel que $\|T\| = 1$ et $Tx = \|x\|$. Il est de la forme

$$T(*) = \langle \delta_x \|\cdot\|, * \rangle \quad . \tag{2.7.10.1}$$

Preuve : Évidement l'opérateur (2.7.10.1) satisfait les revendications. Donc, il reste à montrer l'unicité. Soit $T \in E'$ tel que $\|T\| = 1$ et $Tx = \|x\|$. Pour $y \in E$ et $t \in \mathbb{R}$ pose

$$g(t) := \|x + ty\| - \langle T, x + ty \rangle \quad ,$$

alors g est continue et par supposition différentiable à $t = 0$ avec dérivée

$$g'(0) = \langle \delta_x \|\cdot\|, y \rangle - \langle T, y \rangle \quad .$$

De plus, $g(0) = 0$ et $g(t) \geq 0$ $\forall t$ car $\langle T, x + ty \rangle \leq \|x + ty\|$. Donc, g possède en $t = 0$ un minimum globale et par conséquence $g'(0) = 0$, c'est-à-dire

$$\langle \delta_x \|\cdot\|, y \rangle = \langle T, y \rangle \quad .$$

Cela complète la preuve.

□

Remarque : L'opérateur (2.7.10.1) est impérativement réel, ce qui implique que l'affirmation est fausse pour $\mathbb{C}$-espaces de Banach.

2.7.11 Lemme : Unicité des vecteurs maximisantes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace de Banach uniformément convexe et $T \in E' \setminus \{0\}$. Alors, il existe un unique vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $Tx = \|T\|$.

Preuve d'existence : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ une suite de vecteurs tels que $\|x_n\| = 1\ \forall n$ et $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|T\|$. On va voir que $(x_n)_n$ est Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque et

$$\delta(\varepsilon) := \inf\left\{1 - \left\|\tfrac{x+y}{2}\right\| \ :\ \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| \geq \varepsilon\right\} \quad .$$

Alors, par convexité uniforme $\delta(\varepsilon) > 0$. Donc, comme $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|T\|$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$ on a

$$\|T\| - T\left[\tfrac{x_n+x_m}{2}\right] < \delta(\varepsilon)\cdot\|T\|$$

c'est-à-dire

$$\|T\|\cdot[1-\delta(\varepsilon)] < \frac{1}{2}\langle T, x_n + x_m\rangle \leq \|T\|\cdot\left\|\tfrac{x_n+x_m}{2}\right\|$$

et donc

$$1 - \left\|\tfrac{x_n+x_m}{2}\right\| < \delta(\varepsilon) \quad .$$

Par définition de $\delta(\varepsilon)$ ça implique

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq N \quad ,$$

c'est-à-dire $(x_n)_n$ est Cauchy et possède une limite $x \in E$, $\|x\| = 1$. En particulier, par continuité de T on trouve $Tx = \|T\|$.

Preuve d'unicité : Soient $x, x' \in E$ avec $\|x\| = \|x'\| = 1$ et $Tx = Tx' = \|T\|$. Pour $n \in \mathbb{N}$ pose

$$x_n := \begin{cases} x & : n \in 2\mathbb{Z} \\ x' & : n \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases} \quad .$$

Alors, $Tx_n = \|T\|\ \forall n \in \mathbb{N}$ et de même façon que ci-dessus on trouve que $(x_n)_n$ est Cauchy. Ça implique $x = x'$. □

2.7.12 Corollaire : Théorème de représentation de James

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace de Banach lisse et uniformément convexe. Alors :

1. Pour $x \in E\setminus\{0\}$ il existe un unique $T \in E'$ tel que $\|T\| = 1$ et $Tx = \|x\|$.
2. Pour $T \in E'\setminus\{0\}$ il existe un unique $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $Tx = \|T\|$.
3. En tout cas, il faut $T(*) = \|T\|\cdot\langle\delta_x\|\cdot\|, *\rangle$.

Preuve : Affirmation (1) suit de lemme 2.7.10, affirmation (2) de lemme 2.7.11. Affirmation (3) suit de lemme 2.7.10. □

Exemples :

(i) Soit $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert réell. Par 2.7.3 et 2.7.8 $\mathcal{H}$ est lisse et uniformément convexe. Par James 2.7.12, pour tout opérateur $T \in \mathcal{H}'\setminus\{0\}$ il existe un $x \in \mathcal{H}$ tel que $\|x\| = 1$, $Tx = \|T\|$ et $T = \|T\|\cdot\delta_x\|\cdot\|$. En particulier, pour $y \in \mathcal{H}$ on a

$$Ty = \|T\|\cdot\langle\delta_x\|\cdot\|, y\rangle \overset{2.7.3}{=} \langle\|T\|\cdot x, y\rangle \quad ,$$

c'est-à-dire $T = \langle\|T\|\,x, \cdot\rangle$. On retrouve donc le théorème de représentation de Fréchet-Riesz.

(ii) Considérons l'espace $L^p(\mu)$ des fonctions réelles sur un espace mesuré $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ avec $1 < p < \infty$. Par 2.7.5 et 2.7.9 l'espace $L^p(\mu)$ est lisse et uniformément convexe. Pour $T \in (L^p(\mu))'\setminus\{0\}$ il existe donc par James 2.7.12 une $f \in L^p(\mu)$ telle que $\|f\|_p = 1$, $Tf = \|T\|$ et $T = \|T\|\cdot\delta_f\|\cdot\|_p$. Pour $g \in L^p(\mu)$ on déduit

$$Tg = \|T\|\left\langle\delta_f\|\cdot\|_p, g\right\rangle \overset{2.7.5}{=} \int |f|^{p-2} f\cdot g\, d\mu \quad .$$

Car en fait $|f|^{p-2} f \in L^q(\mu)$ où $1 < q < \infty$ est le conjugué de Hölder de p, on retrouve théorème 1.4.2 sur l'identification du dual $(L^p)'$ par L^q.

2.7.13 Corollaire : Cas spécial du théorème de Hahn-Banach

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace de Banach lisse et uniformément convexe, $X \subseteq E$ un sous-espace linéaire et $T \in X'$. Alors, il existe une unique extension $S \in E'$ telle que

$$S\big|_X = T \quad , \quad \|S\|_{E'} = \|T\|_{X'} \quad .$$

Preuve d'existence : Sans perdu de généralité on suppose $T \neq 0$. On peut suppose aussi que X est fermé, car sinon, on peut par continuité prolonger T norme-préservant sur tout $\mathrm{cl}(X)$. Donc, X est un espace de Banach lisse et uniformément convexe. Par James 2.7.12 il existe un $x \in X$ avec $\|x\| = 1$, $Tx = \|T\|_{X'}$ et $T = \|T\|_{X'} \cdot \delta_x \|\cdot\|$ sur X. On pose

$$S := \|T\|_{X'} \cdot \delta_x \|\cdot\|$$

sur tout E, et trouve que $S\big|_X = T$. De plus, par 2.7.2 $\|S\|_{E'} = \|T\|_{X'}$.

Preuve d'unicité : Suppose que $\tilde{S} \in E' \setminus \{0\}$ est aussi telle que $\|\tilde{S}\|_{E'} = \|T\|_{X'} = \|S\|_{E'}$ et $\tilde{S}\big|_X = T$. Alors

$$\langle \tilde{S}, x \rangle = \langle T, x \rangle = \|T\|_{X'} = \|\tilde{S}\|_{E'} \quad .$$

Par James 2.7.12(1) $\tilde{S}/\|\tilde{S}\| = S/\|S\|$ et donc $\tilde{S} = S$.

□

2.8 Espaces totalement bornés

2.8.1 Definition: Espace précompact et totalement borné

Un espace métrique X est dit **précompact** [10], ssi toute suite de points de X admet une sous-suite de Cauchy. L'espace X est dit **totalement borné** ssi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini par des boules [11] de rayon ε.

Remarques :

(i) Tout espace métrique X compact est totalement borné.

(ii) Tout espace métrique X totalement borné est borné, c'est-à-dire il existe un $C > 0$ tel que $d(x, y) \leq C$ pour tout $x, y \in X$.

(iii) Toute partie bornée dans un espace normé de dimension finie est totalement bornée.

2.8.2 Lemme sur espaces précompacts et totalement bornés

Un espace métrique (X, d) est précompact ssi il est totalement borné.

Preuve :

Direction "⇒" : Supposons que X n'est pas totalement borné. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que on ne peut pas trouver un recouvrement fini de X par des boules de rayon X. Soit $x_1 \in X$ quelconque, alors la boule $B_\varepsilon(x_1)$ n'est pas un recouvrement de X. Donc, on peut choisir un $x_2 \in X \setminus B_\varepsilon(x_1)$. Encore, $B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)$ n'est pas un recouvrement de X. Par induction, on construire une suite $(x_n)_n \subseteq X$ tels que $x_n \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} B_\varepsilon(x_k)$, c'est-à-dire $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon \ \forall n \neq m$. Ça implique en particulier que $(x_n)_n$ ne possède pas une sous-suite de Cauchy.

10. Note que quelques auteurs dit un sous-espace $Y \subseteq X$ précompact si toute suite de points de Y admet une sous-suite convergente dans X. Les deux définitions coïncident seulement en cas d'un espace X complet.

11. Note que pour un sous-espace $Y \subseteq X$ totalement borné, on peut suppose que les boules sont centrées dans Y, ou on peut l'omettre. En tout cas, la définition reste la même.

Direction "$\Leftarrow$" : Soit $(x_n^0)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ une suite de points de X. Par supposition, il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayon 1. Une de ces boules contient une infinité de x_n^0. On note cette boule B_1. Donc, il existe un sous-suite $(x_n^1)_n$ de $(x_n^0)_n$ contenu dans B_1. Par récurrence, on trouve sous-suites $(x_n^k)_n$ de $(x_n^0)_n$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la sous-suite $(x_n^k)_n$ est contenu dans une boule B_k de rayon $\frac{1}{k}$ et est une sous-suite de $(x_n^{k-1})_n$. On pose $y_n := x_n^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et trouve pour $n, m \geq k$ que $d(y_n, y_m) \in B_k$, c'est-à-dire $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est Cauchy.

□

2.8.3 Lemme : Caractérisation de la compacité

Un espace métrique X est compact ssi il est totalement borné et complet.

Preuve : On va utiliser le fait que sur espaces métriques, le notions de la compacité et compacité séquentielle sont équivalentes. Tout espace compact est totalement borné. De plus, tout espace séquentiellement compact est complet. Inversement, par 2.8.2 tout espace totalement borné est précompact, c'est-à-dire toute suite possède une sous-suite de Cauchy. Par complétude, elle converge dans X, donc X est séquentiellement compact.

□

2.8.4 Definition: Fonction bornée et totalement bornée

Une fonction $f : X \to Y$ d'un ensemble X dans un espace métrique (Y, d_Y) est dit **bornée** ssi son image est bornée, c'est-à-dire il existe un $C > 0$ tel que

$$\sup_{x,x'\in X} d_Y(f(x), f(x')) < C \quad .$$

Elle est dit **totalement bornée** ssi son image $f(X)$ est totalement bornée.

Remarques :

(i) Une fonction $f : X \to Y$ est bornée ssi il existe un $x \in X$ et $r > 0$ tels que $f(X) \subseteq B_r(f(x))$.

(ii) Toute fonction totalement bornée est bornée.

(iii) Toute fonction bornée dans un espace normé de dimension fini, est totalement bornée.

(iv) Le système $\mathcal{B}(X, Y)$ des fonctions $f : X \to Y$ bornées, muni de la **distance uniforme**

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x)) \quad , \quad f, g \in \mathcal{B}(X, Y)$$

est un espace métrique.

2.8.5 Definition: Famille de fonctions équicontinue

Une famille de fonctions $(f_i)_{i\in I}$ d'un espace topologique X dans un espace métrique (Y, d_Y) est dit **équicontinue** si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X : \exists \text{ voisinage } U \text{ de } x : \forall i \in I : f_i(U) \subseteq B_\varepsilon(f_i(x)) \quad .$$

Si (X, d_X) est un espace métrique, on dit $(f_i)_{i\in I}$ **uniformément équicontinue** ssi

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall i \in I, x \in X : f_i\left(B_\delta(x)\right) \subseteq B_\varepsilon(f_i(x)) \quad .$$

On dit $(f_i)_{i\in I}$ **ponctuellement totalement bornée** si pour tout $x \in X$ l'ensemble $\bigcup_{i\in I} f_i(x)$ est totalement borné. On dit $(f_i)_{i\in I}$ **uniformément totalement bornée** si l'ensemble $\bigcup_{i\in I} f_i(X)$ est totalement borné.

Remarques :

(i) Toute famille uniformément équicontinue est équicontinue.

(ii) Si $(f_i)_{i\in I}$ est (uniformément) équicontinue, alors toute f_i est (uniformément) continue.

(iii) Si $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément totalement bornée, alors toute f_i est totalement bornée.

(iv) Toute famille finie de fonctions (uniformément) continues de X dans Y est (uniformément) équicontinue.

(v) Toute famille finie de fonctions totalement bornées de X dans Y est uniformément totalement bornée.

2.8.6 Lemme sur fonctions uniformément bornées

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille ponctuellement totalement bornée de fonctions d'un espace topologique X dans un espace métrique (Y, d_Y). Alors :

(i) Si X est compact et $(f_i)_{i\in I}$ équicontinue, alors la famille est uniformément totalement bornée.

(ii) Si X est un espace métrique totalement borné et $(f_i)_{i\in I}$ uniformément équicontinue, alors la famille est uniformément totalement bornée.

Preuve :

1. Soit $\varepsilon > 0$ n'importante quel. Pour tout $x \in X$ soit U_x une voisinage de x tel que $f_i(U_x) \subseteq B_\varepsilon(f_i(x))$ $\forall i \in I$. Alors, il existe un recouvrement de X fini par des voisinages $U_{x_1}, .., U_{x_n}$, c'est-à-dire $X = \bigcup_{k=1}^n U_{x_k}$ et donc

$$\bigcup_{i\in I} f_i(X) \subseteq \bigcup_{i\in I}\bigcup_{k=1}^n f_i(U_{x_k}) \subseteq \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i\in I} B_\varepsilon(f_i(x_k)) \quad .$$

Il suffit de montrer que chaque $\bigcup_{i\in I} B_\varepsilon(f_i(x_k))$ est recouvrable par un nombre fini des 2ε-boules. Par hypothèse on peut trouver des boules $B_\varepsilon(y_1), .., B_\varepsilon(y_m)$ qui recouvrent $\bigcup_{i\in I} f_i(x_k)$. Par conséquence, les boules $B_{2\varepsilon}(y_1), .., B_{2\varepsilon}(y_m)$ recouvrent $\bigcup_{i\in I} B_\varepsilon(f_i(x_k))$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ n'importante quel. Par l'équicontinuité uniforme, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall i \in I,\ x \in X : f_i(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f_i(x)) \quad .$$

Soient $x_1, .., x_n \in X$ tels que $X \subseteq \bigcup_{k=1}^n B_\delta(x_k)$. Alors :

$$\bigcup_{i\in I} f_i(X) \subseteq \bigcup_{i\in I}\bigcup_{k=1}^n f_i(B_\delta(x_k)) \subseteq \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i\in I} B_\varepsilon(f_i(x_k)) \quad .$$

De même comme (i) ci-dessus, on trouve que pour tout $k \in \{1, .., n\}$ l'ensemble $\bigcup_{i\in I} B_\varepsilon(f_i(x_k))$ est recouvrable par un nombre fini de 2ε-boules. Donc $\bigcup_{i\in I} f_i(X)$ est également.

□

2.8.7 Théorème d'Ascoli

Soit (X, d_X) un espace métrique totalement borné et (Y, d_Y) un espace métrique quelconque. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications uniformément équicontinue et ponctuellement totalement bornée de X dans Y. Alors, $\mathcal{F}$ est totalement bornée dans $\mathcal{B}(X, Y)$ par rapport à la distance uniforme d_∞ (voir remarque 2.8.4(iv)).

Remarque : Par lemme 2.8.6(ii), la famille $\mathcal{F}$ est uniformément totalement bornée et donc par remarque 2.8.5(iii) vraiment une sous-partie de $\mathcal{B}(X, Y)$.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$ n'importante quel. Par l'équicontinuité uniforme, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{F},\ x \in X : f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f_i(x)) \quad . \tag{2.8.7.1}$$

Soit $B_\delta(x_1), .., B_\delta(x_n)$ un recouvrement de X par des boules de rayon δ. Soit $B_\varepsilon(y_1), .., B_\varepsilon(y_m)$ un recouvrement de $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(X)$ par des boules de rayon ε. Soit Γ l'ensemble des applications de $\{1, .., n\}$ dans $\{1, .., m\}$. Pour $\gamma \in \Gamma$ on pose

$$\mathcal{F}_\gamma := \left\{ f \in \mathcal{F} : f(x_k) \in B_\varepsilon(y_{\gamma(k)})\ \forall\ k \in \{1, .., n\} \right\} \quad ,$$

alors $\mathcal{F} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$. Car Γ est de cardinal fini, il suffit de montrer que tout $\mathcal{F}_\gamma$ est recouvrable par un nombre fini de boules de rayon 4ε.
Soit $\gamma \in \Gamma$ quelconque. Pour deux $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_\gamma$ on a par construction

$$f_j(x_k) \subseteq B_\varepsilon(y_{\gamma(k)}) \ \ \forall\ k \in \{1, .., n\},\ j \in \{1, 2\} \quad .$$

et donc $d_Y(f_1(x_k), f_2(x_k)) \le 2\varepsilon\ \forall k = 1, .., n$. En fait, à cause de (2.8.7.1) il faut

$$d_Y(f_1(x), f_2(x)) \le 4\varepsilon \ \ \forall x \in B_\delta(x_k) \quad , \quad k \in \{1, .., n\} \quad .$$

Car les boules $B_\delta(x_k)$ recouvrent X, on déduit que $d_\infty(f_1, f_2) \le 4\varepsilon$. Donc, $\mathcal{F}_\gamma$ est vraiment recouvrable par une boule de rayon 4ε.

□

2.8.8 Théorème de Riesz sur espaces totalement bornés dans L^p

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $1 \le p < \infty$ et $S \subseteq L^p(\Omega)$ telle que :

1. S est uniformément bornée, c'est-à-dire

$$\sup_{f\in S} \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty \quad .$$

2. Pour toute compacte $K \subseteq \Omega$ on a

$$\lim_{h\to 0} \sup_{f\in S} \|f(\cdot - h) - f(\cdot)\|_{L^p(K)} = 0 \quad .$$

3. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une compacte $K \subseteq \Omega$ telle que

$$\sup_{f\in S} \|f\|_{L^p(K)} \le \varepsilon \quad .$$

Alors, S est totalement bornée dans $L^p(\Omega)$.

2.8.9 Exemple : Compacité des opérateurs intégraux

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert et $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ satisfaisant les suivants :

1. G est uniformément continue.
2. $\|G(\cdot, \cdot)\|_\infty < \infty$.
3. $\sup_y \|G(\cdot, y)\|_{L^1(\Omega)} < \infty$.

Alors, l'opérateur $\hat{G} : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ défini par $(\hat{G}g)(x) := \int_\Omega dy\ G(x, y) \cdot g(y)$ est compact.

Preuve : Comme pour toute $g \in L^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega dx\ \left|(\hat{G}g)(x)\right| \le \int_\Omega dx \int_\Omega dy\ \ |G(x, y)| \cdot |g(y)| = \int_\Omega dy\ \ |g(y)| \int_\Omega dx\ \ |G(x, y)| \le \|g\|_{L^1(\Omega)} \cdot \underbrace{\sup_y \|G(\cdot, y)\|_{L^1(\Omega)}}_{\text{const}<\infty}, \tag{2.8.9.1}$$

on sait que $\hat{G} : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ est borné. Soit $B_1 \subseteq L^1(\Omega)$ la boule unité. On montre que la famille $S := \{\hat{G}g : g \in B_1\} \subseteq L^1(\Omega)$ satisfait les axiomes du théorème de Riesz 2.8.8. Comme $\hat{G}$ est borné, déjà axiome 2.8.8(1) est satisfait. De plus, pour toute compacte $K \subseteq \Omega$ et $g \in B_1$ on a

$$\|\hat{G}g\|_{L^1(K)} \leq \int_K dx \int_\Omega dy \ |G(x,y)| \cdot |g(y)| = \int_\Omega dy \ |g(y)| \int_K dx \ |G(x,y)| \tag{2.8.9.2}$$

$$\leq \|G\|_\infty \cdot \lambda(K) \cdot \|g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|G\|_\infty \cdot \lambda(K). \tag{2.8.9.3}$$

En choisissant la compacte K assez petite, $\sup_{g\in B_1} \|\hat{G}g\|_{L^1(K)}$ devient assez petit. En conséquence, axiome 2.8.8(3) est aussi satisfait. Il nous reste à montrer axiome 2.8.8(2). Soit $K \subseteq \Omega$ une compacte quelconque, $g \in B_1$ et $h \in \mathbb{R}^n$ (tellement petit que $K - h \subseteq \Omega$). Alors

$$\sup_{g\in B_1} \|(\hat{G}g)(\cdot - h) - (\hat{G}g)(\cdot)\|_{L^1(K)} \leq \sup_{g\in B_1} \int_K dx \int_\Omega dy \ |g(y)| \cdot |G(x-h,y) - G(x,y)| \tag{2.8.9.4}$$

$$\leq \sup_{g\in B_1} \|g\|_{L_1(\Omega)} \cdot \int_K dx \ \|G(x-h,\cdot) - G(x,\cdot)\|_\infty \tag{2.8.9.5}$$

$$\leq \lambda(K) \cdot \|G(\cdot - h, \cdot) - G(\cdot,\cdot)\|_\infty . \tag{2.8.9.6}$$

Comme G est uniformément continue, la partie droite de (2.8.9.4) tende vers 0 comme $h \to 0$. Par Riesz 2.8.8, $\hat{G}(B_1) \subseteq L_1(\Omega)$ est totalement bornée, c'est à dire $\hat{G}$ compact.

□

2.8.10 Théorème sur familles totalement bornées dans L^p_{loc}

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $1 \leq p < \infty$ et $S \subseteq L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ n'importante quel. Supposons que pour toute compacte $K \subseteq \Omega$ on a

$$C(K) := \sup_{f\in S} \|f\|_{L^p(K)} < \infty \tag{2.8.10.1}$$

et [12]

$$\lim_{h\to 0} \sup_{f\in S} \|\tau_h f - f\|_{L^p(K)} = 0 \quad . \tag{2.8.10.2}$$

où $(\tau_h f)(x) := f(x-h)$. Alors, pour toute compacte $K \subseteq \Omega$ la famille $S\big|_K := \{f\big|_K : f \in S\}$ est totalement bornée dans $L^p(K)$.

Idée de preuve : *Régularise* les $f\big|_K$, $f \in S$ pour obtenir des continues *assez proche* aux $f\big|_K$ et applique le théorème d'Ascoli 2.8.7.

Preuve : Soit $K \subseteq \Omega$ compact. Choisissons une ouverte $U \subseteq \mathbb{R}^n$ relativement compacte telle que $K \subseteq U \subseteq \Omega$. Note que par A.3.1 $d(K, \partial U) > 0$. On se fixe $\varepsilon > 0$ et montre que $S\big|_K$ est recouvrable par un nombre fini de boules de rayon 2ε. Il existe par (2.8.10.2) un $0 < \delta < d(K, \partial U)$ tel que

$$\forall f \in S \ : \ \sup_{\|h\|<\delta} \|\tau_h f - f\|_{L^p(K)} \leq \varepsilon \quad . \tag{2.8.10.3}$$

Posons

$$\rho(x) := \begin{cases} C \cdot \exp\left[-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right] & : \|x\| < 1 \\ 0 & : \|x\| \geq 1 \end{cases} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad .$$

Alors, par choix de $C > 0$ convient, ρ devient une densité de probabilité, c'est-à-dire $\rho \geq 0$ et $\int \rho \, d\lambda = 1$. De plus, $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\text{supp}(\rho) = B_1(0)$. On pose

$$\rho_k : \mathbb{R}^n \to [0,\infty) \quad , \quad \rho_k(x) := k^n \cdot \rho(kx)$$

12. Soit $K \subseteq \Omega$ compact, fixé. Noter que par 1.6.3, pour $f \in S$ fixé l'application $\tau f : h \mapsto \tau_h f\big|_K \in L^p(K)$ est continue dans 0. La revendication (2.8.10.2) dit rien autre que la famille $(\tau f)_{f\in S}$ est équicontinue (dans 0), pour n'importante quel K.

Alors, $\rho_k \in \mathcal{C}^\infty$ sont densités de probabilité de support $B_{\frac{1}{k}}(0)$. Noter que $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac δ_0 de support compact (voir 1.7.1).

Proposition : Si $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, alors pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand on a

$$\|\rho_k * f - f\|_{L^p(K)} \leq \sup_{\|h\|\leq \frac{1}{k}} \|\tau_h f - f\|_{L^p(K)} \quad . \tag{2.8.10.4}$$

Preuve : Pour $x \in \Omega$ on a

$$|(\rho_k * f)(x) - f(x)|^p = \left|\int \rho_k(y) f(x-y)\, dy - f(x)\right|^p \leq \left[\int \rho_k(y)\, |f(x-y) - f(x)|\, dy\right]^p$$

$$\leq \int |f(x-y) - f(x)|^p\, \rho_k(y)\, dy \quad .$$

Noter que pour la dernière étape on a utilisé l'inégalité de Jensen 1.2.1 pour le mesure $\rho(y)dy$ et la convexe $x \mapsto x^p$. Par conséquence

$$\|\rho_k * f - f\|^p_{L^p(K)} = \int\limits_K |(\rho_k * f)(x) - f(x)|^p\, dx$$

$$\leq \int\limits_K \left[\int\limits_{B_{\frac{1}{k}}(0)} |f(x-y) - f(x)|^p \cdot \rho_k(y)\, dy\right] dx \quad \Big| \quad \text{Fubini-Tornelli}$$

$$\leq \int\limits_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \rho_k(y) \cdot \|\tau_y f - f\|^p_{L^p(K)}\, dy \leq \sup_{\|y\|\leq\frac{1}{k}} \|\tau_y f - f\|^p_{L^p(K)} \quad ,$$

d'où on déduit la proposition (2.8.10.4). On fixe $k \in \mathbb{N}$ assez grand pour (2.8.10.4) et tel que $\frac{1}{k} \leq \delta$, alors par (2.8.10.3) et (2.8.10.4) on trouve

$$\|\rho_k * f - f\|_{L^p(K)} \leq \varepsilon \quad \forall f \in S \quad . \tag{2.8.10.5}$$

On suppose de plus que $\frac{1}{k} \leq d(K, \partial U)$ et considère $R := \left\{(\rho_k * f)\big|_K : f \in S\right\}$. Alors, pour $x \in K$ et $f \in S$ on trouve

$$|(\rho_k * f)(x)| = \left|\int \rho_k(y) f(x-y)\, dy\right| \overset{\text{Jensen}}{\leq} \left|\int \rho_k(y)\, |f(x-y)|^p\, dy\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|\rho_k\|_\infty \cdot \|f\|_{L^p(\overline{U})} \leq \|\rho_k\|_\infty \cdot C(\overline{U}) \quad ,$$

c'est-à-dire R est uniformément totalement bornée. Noter que $\overline{U}$ est compacte. De même, on montre que R est uniformément équicontinue. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli 2.8.7 et trouver que R est totalement bornée par rapport à $\|\cdot\|_\infty$. Or, pour $g \in \mathcal{C}^0(K)$ on sait que

$$\|g\|_{L^p(K)} \leq \|g\|_\infty \cdot (\lambda(K))^{\frac{1}{p}} \quad .$$

Donc, tout ensemble totalement borné dans $\left(\mathcal{C}^0(K), \|\cdot\|_\infty\right)$ est totalement borné dans $\left(\mathcal{C}^0(K), \|\cdot\|_{L^p(K)}\right)$. En particulier, R est totalement borné par $\|\cdot\|_{L^p(K)}$. Par (2.8.10.5), on déduit que $S\big|_K := \left\{f\big|_K : f \in S\right\}$ est recouvrable par un nombre fini de boules de rayon 2ε.

□

3 Analyse Fourier sur S^1

3.1 La transformation de Fourier sur S^1

3.1.1 Fonctions 2π-périodiques

On va considérer des fonctions 2π-périodiques, c'est-à-dire des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tels que $f(t + 2\pi) = f(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Équivalent, on peut les regarder comme fonctions $f : S^1 \to \mathbb{C}$ ou comme fonctions $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ satisfaisant $f(2\pi) = f(0)$. On suppose sur $[0, 2\pi]$ la mesure de Lebesgue normée $\lambda_{2\pi}$, c'est-à-dire $\lambda_{2\pi}(A) := \lambda(A\cap[0, 2\pi])/2\pi$ pour $A \subseteq \mathbb{R}$. Souvent, on suppose $\lambda_{2\pi}$ définie sur $(S^1, \mathscr{B}(S^1))$ comme la mesure *pushforward* de $\lambda_{2\pi}$ via le revêtement $t \mapsto e^{it}$.

Pour $1 \leq p \leq \infty$ et 2π-périodique mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on note

$$\|f\|_{L^p_{2\pi}} := \|f\|_{L^p(\lambda_{2\pi})} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \ dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

et

$$L^p_{2\pi} := \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ } 2\pi\text{-périodique } : \ \|f\|_{L^p_{2\pi}} < \infty\right\} \cong L^p\left(S^1, \mathscr{B}(S^1), \lambda_{2\pi}\right) \quad .$$

On note pour $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{C}^n_{2\pi} := \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ } 2\pi\text{-périodique}\right\} \cong \mathcal{C}^n(S^1, \mathbb{C})$$

Noter que :

- Par théorème 1.3.1(1) on a $L^s_{2\pi} \subseteq L^r_{2\pi}$ pour tout $1 \leq r \leq s \leq \infty$.
- Une 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dans $L^p_{2\pi}$ ssi elle est dans $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et $1 \leq p \leq \infty$ on a $\mathcal{C}^n_{2\pi} \subseteq L^p_{2\pi}$.

On définit la **convolution**

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t - s)g(s) \ ds$$

pour deux $f, g \in L^1_{2\pi}$. Noter que [13] $* : L^1_{2\pi} \times L^1_{2\pi} \to L^1_{2\pi}$. Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables, 2π-periodiques on pose

$$\langle f, g\rangle_{2\pi} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f}(t) \cdot g(t) \ dt \quad .$$

Alors, $\langle\cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $L^2_{2\pi}$.

3.1.2 Definition: Polynômes trigonométriques

On définit pour $n \in \mathbb{Z}$ la fonction 2π-périodique

$$e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad e_n : t \mapsto e^{int} \quad .$$

On dit $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la famille des **monômes trigonométriques** sur S^1. L'espace $\mathcal{E}_{2\pi} := \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ forme un sous-espace vectoriel de $L^p_{2\pi}$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$. Comme il est un monoide par rapport à la multiplication, il forme une $\mathbb{C}$-algèbre, appelé l'algèbre des **polynômes trigonométriques** sur S^1.

3.1.3 Definition: Spectre

Pour $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on appelle

$$\mathcal{F}_n(f) := \langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t) \ dt$$

13. Prouvé en façon similaire comme dans 1.6.1(1).

le n**-ème coefficient de Fourier** de f. L'application linéaire

$$\mathcal{F} : L^1_{2\pi} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \quad , \quad \mathcal{F} : f \mapsto (\mathcal{F}_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$$

est dit **transformation de Fourier** sur $L^1_{2\pi}$. En fait, on va voir qu'elle est un homomorphisme d'algèbres $(L^1_{2\pi}, +, *) \to (l_0(\mathbb{C}), +, \cdot)$ (voir 3.1.8). On appelle

$$\operatorname{spec}(f) := \{n \in \mathbb{Z} : \mathcal{F}_n(f) \neq 0\} = \operatorname{supp} \mathcal{F}(f)$$

le **spectre** de f.
Pour $N \in \mathbb{N}_0$ on appelle

$$S_N(f) := \sum_{n=-N}^{N} \mathcal{F}_n(f) \cdot e_n$$

la **somme partielle de Fourier de** f **d'ordre** N. Noter que si $f \in \mathcal{E}_{2\pi}$ est un polynôme trigonométrique de la forme $f = \sum_{|n|\leq N_0} c_n \cdot e_n$ avec $c_n \in \mathbb{C}$, alors $S_N(f) = f$ pour tout $N \geq N_0$. En particulier, l'opérateur $S_N : L^1_{2\pi} \to L^1_{2\pi}$ est idempotent, c'est-à-dire $S_N \circ S_N = S_N$.
La question se pose sous quels circonstances et dans quel façon la série $(S_N(f))_N$ converge vers f pour une $f \in L^1_{2\pi}$ donnée. Théorème 3.3.5 montre que cela n'est pas du tout une question triviale.

3.1.4 Lemme : Existence de la convolution sur S^1

1. Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugués de Hölder. Si $f \in L^p_{2\pi}$ et $g \in L^q_{2\pi}$, alors $f * g$ existe partout et est bornée avec la norme
$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_{L^p_{2\pi}} \cdot \|g\|_{L^q_{2\pi}} \quad .$$
2. Si $f, g \in L^1_{2\pi}$, alors $f * g$ existe presque partout et est dans $L^1_{2\pi}$ avec la norme
$$\|f * g\|_{L^1_{2\pi}} \leq \|f\|_{L^1_{2\pi}} \cdot \|g\|_{L^1_{2\pi}} \quad .$$
3. Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p_{2\pi}$. Soit $\rho \in L^1_{2\pi}$ une densité de probabilité sur $(S^1, \lambda_{2\pi})$. Alors, $f * \rho$ existe presque partout et possède la norme
$$\|f * \rho\|_{L^p_{2\pi}} \leq \|f\|_{L^p_{2\pi}} \quad .$$

Preuve :

1. De façon similaire à l'exemple 1.6.1(1).
2. De façon similaire à l'exemple 1.6.1(2).
3. Le cas $p = \infty$ suit de (1). Supposons donc $1 \leq p < \infty$. Si $f \in L^p_{2\pi}$, alors $f \in L^1_{2\pi}$. Donc, par (2) $f * \rho$ existe presque partout. De
$$|(f*\rho)(s)|^p = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s-t)\rho(t)\ dt \right|^p \overset{\text{Jensen}\ 1.2.1}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(s-t)|^p \rho(t)\ dt \quad ,$$
on obtient
$$\|f * \rho\|^p_{L^p_{2\pi}} \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(s-t)|^p \rho(t)\ dt\ ds \overset{\text{Tornelli}}{=} \|f\|^p_{L^p_{2\pi}} \quad .$$

□

3.1.5 Propriétés de la transformation Fourier

Soient $f \in L^1_{2\pi}$, $g \in L^\infty_{2\pi}$, $a \in \mathbb{R}$ et $k, n \in \mathbb{Z}$. Alors :

1. Si $\tilde{f}(t) := f(-t)$, alors $\mathcal{F}_n(\tilde{f}) = \mathcal{F}_{-n}(f)$.
2. $\mathcal{F}_n(\overline{f}) = \overline{\mathcal{F}_{-n}(f)}$.
3. $\mathcal{F}_n(x \mapsto f(x+a)) = e^{ina}\mathcal{F}_n(f)$.
4. $\mathcal{F}_n(e_k \cdot f) = \mathcal{F}_{n-k}(f)$.
5. $f * e_n = \mathcal{F}_n(f) \cdot e_n$. Par conséquence, $* : L^1_{2\pi} \times \mathcal{E}_{2\pi} \to \mathcal{E}_{2\pi}$.
6. $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$.
7. Si f est de $\mathcal{C}^1$ (par morceaux), alors $\mathcal{F}_n(f') = in \cdot \mathcal{F}_n(f)$.

3.1.6 Une base alternative de $\mathcal{E}_{2\pi}$

Considérons l'espace linéaire $\mathcal{E}_{2\pi} := \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ des fonctions trigonométriques sur $[0, 2\pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on pose $u_n, v_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ comme $u_n(t) := \cos(nt)$ et $v_n(t) := \sin(nt)$. Comme $e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt)$, on peut écrire

$$\mathcal{E}_{2\pi} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{u_n, v_n : n \in \mathbb{N}_0\} \quad .$$

De plus

$$\begin{aligned}
\langle u_n, v_m\rangle_{2\pi} &= 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0 \\
\langle u_0, u_n\rangle_{2\pi} &= \delta_{0n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \\
\langle u_n, u_m\rangle_{2\pi} &= \frac{\delta_{nm}}{2} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \\
\langle v_n, v_m\rangle_{2\pi} &= \frac{\delta_{nm}}{2} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire les $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \cup \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base orthogonale de $(\mathcal{E}_{2\pi}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{2\pi})$. Pour $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}_0$ on note

$$\begin{aligned}
a_n(f) &:= 2\langle u_n, f\rangle_{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt) f(t)\, dt = \mathcal{F}_n(f) + \mathcal{F}_{-n}(f) \quad , \\
b_n(f) &:= 2\langle v_n, f\rangle_{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt) f(t)\, dt = i\mathcal{F}_n(f) - i\mathcal{F}_{-n}(f) \quad ,
\end{aligned}$$

et trouve que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n(f) &= \frac{1}{2}\left[a_n(f) - ib_n(f)\right] \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad , \\
S_N(f) &:= \sum_{n=-N}^{N} \mathcal{F}_n(f) \cdot e_n = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n(f) \cdot u_n + b_n(f) \cdot v_n\right] \quad .
\end{aligned}$$

En particulier, si $f \in \mathcal{E}_{2\pi}$ est de la forme

$$f = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[\alpha_n \cdot u_n + \beta_n \cdot v_n\right] \quad ,$$

où $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, alors

$$a_n(f) = \begin{cases} \alpha_n & : 0 \leq n \leq N \\ 0 & : \text{sinon} \end{cases} \quad , \quad b_n(f) = \begin{cases} \beta_n & : 1 \leq n \leq N \\ 0 & : \text{sinon} \end{cases} \quad .$$

Remarques : Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Alors :

(i) Si f est réelle, alors les $a_n(f), b_n(f)$ sont également.

(ii) Si f est paire, alors tous les $b_n(f)$ sont nuls et $\mathcal{F}_n(f) = \mathcal{F}_{-n}(f)$.

(iii) Si f est impaire, alors tous les $a_n(f)$ sont nuls et $\mathcal{F}_n(f) = -\mathcal{F}_{-n}(f)$.

(iv) Si f est réelle et paire, alors tout $\mathcal{F}_n(f)$ est réel.

(v) Si f est réelle et impaire, alors tout $\mathcal{F}_n(f)$ est purement imaginaire.

3.1.7 Lemme de Lebesgue sur les coefficients de Fourier

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1([a,b])$. Alors :

$$\lim_{|h|\to\infty} \int_a^b f(t)e^{iht}\ dt = \lim_{|h|\to\infty} \int_a^b f(t)\cos(ht)\ dt = \lim_{|h|\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(ht)\ dt = 0 \quad .$$

3.1.8 Lemme : La transformation de Fourier comme morphisme d'algèbres

La transformation de Fourier

$$\mathcal{F} : L^1_{2\pi} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \quad , \quad \mathcal{F} : f \mapsto (\mathcal{F}_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$$

est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres[14] de $\left(L^1_{2\pi}, +, *\right)$ dans $(l_0(\mathbb{C}), +, \cdot)$ de norme 1. Ici, $l_0(\mathbb{C})$ est l'espace des suites $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui convergent vers 0, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et l'addition & multiplication composant par composant.

Preuve : Par lemme 3.1.7 on sait que pour $f \in L^1_{2\pi}$ on a vraiment $\mathcal{F}(f) \in l_0(\mathbb{C})$. Évidement $\mathcal{F} : L^1_{2\pi} \to l_0(\mathbb{C})$ est $\mathbb{C}$-linéaire. De plus

$$|\mathcal{F}_n(f)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\ dt \right| \leq \|f\|_1 \quad ,$$

c'est-à-dire $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$ et donc $\|\mathcal{F}\| \leq 1$. D'autre part, car $\|\mathcal{F}(e_0)\|_\infty = 1 = \|e_0\|_1$ on déduit $\|\mathcal{F}\| = 1$. Soient $f, g \in L^1_{2\pi}$. Alors par Fubini-Tornelli

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(s)\cdot g(t-s)|\ ds\ dt \overset{\text{Tornelli}}{=} \int_0^{2\pi} |f(s)| \underbrace{\int_0^{2\pi} |g(t-s)|\ dt}_{2\pi\cdot\|g\|_1}\ ds = (2\pi)^2\, \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < 0$$

et donc par Fubini

$$\mathcal{F}_n(f*g) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} e^{-int} \int_0^{2\pi} f(s)g(t-s)\ ds\ dt \overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} f(s) \int_0^{2\pi} e^{-int} g(t-s)\ dt\ ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)e^{-ins}\mathcal{F}_n(g)\ ds = \mathcal{F}_n(f)\cdot\mathcal{F}_n(g) \quad .$$

Plus précisément $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$.

□

14. Noter que et $(L^1_{2\pi}, *)$ et $(l_0(\mathbb{C}), \cdot)$ n'ont pas d'éléments d'unité.

3.2 Approximations de Dirac dans S^1

3.2.1 Famille des bons noyaux

On dit qu'une famille des fonctions complexes sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de **bons noyaux dans** S^1 si elle satisfait :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_k(t)\, dt = 1$.
2. Il existe un $C > 0$ tel que $\|\Phi_k\|_{L^1_{2\pi}} \leq C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Pour toute ouverte U contenant 0 on a $\int_{[0,2\pi]\setminus U} |\Phi_k(t)|\, dt \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

3.2.2 Approximations de Dirac 2π-périodiques

Soit $x \in S^1$ quelconque. On dit une famille de fonctions réelles, bornées, 2π-périodiques (donc sur S^1) $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une **approximation de Dirac** δ_x **dans** S^1 ssi elle est une approximation de Dirac[15] δ_x dans l'espace mesuré $\big(S^1, \mathscr{B}(S^1), \lambda_{2\pi}\big)$.

Autrement dit, les 2π-périodiques, bornées $\Phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forment une approximation de Dirac δ_x (suppose $x \in (0, 2\pi)$) dans $[0, 2\pi]$ ssi :

- Toute $\Phi_k\big|_{[0,2\pi]}$ est une densité de probabilité sur $([0, 2\pi], \mathscr{B}([0, 2\pi]), \lambda_{2\pi})$.
- Pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\int_{[0,2\pi]\setminus B^o_\varepsilon(x)} \Phi_k \, d\lambda_{2\pi} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

Remarques

(i) Toute famille $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac δ_0 dans S^1 ssi elle est une famille de bons noyaux dans S^1, bornées, réelles, non-négatives.

3.2.3 Lemme : Continuité de la translation sur S^1

Pour $s \in \mathbb{R}$ soit $\tau_s : L^1_{2\pi} \to L^1_{2\pi}$ définie par $(\tau_s f)(t) := f(t - s)$. Alors, pour $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p_{2\pi}$ fixé, on a

$$\|\tau_s f - f\|_{L^p_{2\pi}} \overset{s\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

Preuve : Évidement, l'opérateur $\tau_s : L^p_{2\pi} \to L^p_{2\pi}$ est linéaire et une isométrie par rapport à $\|\cdot\|_{L^p_{2\pi}}$. Pour continue $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ on a

$$\|\tau_s f - f\|^p_{L^p_{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t-s) - f(t)|^p \, dt \quad .$$

Car f est continue, $\tau_s f \overset{s\to 0}{\longrightarrow} f$ ponctuellement. De plus

$$|\tau_s f - f|^p \leq \underbrace{2^p \big[\, |\tau_s f|^p + |f|^p \,\big]}_{\in L^1_{2\pi}} \quad .$$

Donc par Lebesgue

$$\|\tau_s f - f\|^p_{L^p_{2\pi}} \overset{s\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

Soit $g \in L^1_{2\pi}$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. Car $\mathcal{C}_{2\pi}$ est dense dans $L^p_{2\pi}$, on peut choisir un $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ tel que $\|f - g\|_{L^p_{2\pi}} \leq \varepsilon$. Choisir $s_0 > 0$ assez petit tel que $\|\tau_s f - f\|_{L^p_{2\pi}} \leq \varepsilon$ pour tout $s \leq s_0$. Alors

$$\|\tau_s g - g\|_{L^p_{2\pi}} \leq \underbrace{\|\tau_s g - \tau_s f\|_{L^p_{2\pi}}}_{\leq \|g-f\|_{L^p_{2\pi}} \leq \varepsilon} + \underbrace{\|\tau_s f - f\|_{L^p_{2\pi}}}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|f - g\|_{L^p_{2\pi}}}_{\leq \varepsilon} \leq 3\varepsilon \quad \forall s \leq s_0$$

15. Voir 1.7.1.

d'où on déduit que $\|\tau_s g - g\|_{L^p_{2\pi}} \overset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$.

$\square$

Conséquence : Soit $f \in L^p_{2\pi}$ fixé. Alors, l'application $\mathbb{R} \to L^p_{2\pi},\ s \mapsto \tau_s f$ est continue partout.

3.2.4 Lemme : Continuité uniforme de fonctions périodiques

Soit (Y, d) un espace métrique et $\tau = (\tau_1, .., \tau_n) \in (0, \infty)^n$ fixé. Soit $f : \mathbb{R}^n \to Y$ continue et τ-périodique, c'est-à-dire $f(k \cdot \tau + x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{Z}^n$. Alors, f est totalement bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve : Comme f est continue sur le segment compact $T := \bigtimes_{i=1}^{n} [0, 2\tau_i]$, elle est uniformément continue sur T d'après le théorème de Heinne. De plus, comme $f(T)$ est compact, f est totalement bornée. Soit $\varepsilon > 0$ n'importante quel. Choisissons $0 < \delta < \min_{1\le i\le n} \tau_i =: \tau_0$ tel que

$$\forall x \in T : f\left(T \cap B_\delta(x)\right) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \quad .$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x - y\| \le \delta$, alors on peut trouver un $k \in \mathbb{Z}^n$ tel que $x - k \cdot \tau$ et $y - k \cdot \tau$ appartient à T. Comme

$$\|(x - k \cdot \tau) - (y - k \cdot \tau)\| = \|x - y\| \le \delta \quad ,$$

on trouve

$$d(f(x), f(y)) = d\left(f(x - k \cdot \pi), (y - k \cdot \pi)\right) \le \varepsilon \quad ,$$

d'où on déduit la continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}^n$.

$\square$

3.2.5 Definition: Module de continuité

Soient (X, d), (Y, d) espaces métriques et $f : X \to Y$ n'importante quelle. Pour $\delta \ge 0$ on note

$$\omega_f(\delta) := \sup\left\{d(f(x_1), f(x_2)) : x_1, x_2 \in X,\ d(x_1, x_2) \le \delta\right\} \quad ,$$

et appelle $\omega_f : [0, \infty) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ **module de continuité** de f.

Remarques

(i) ω_f est croissante.

(ii) Si $f : X \to Y$ est bornée, alors ω_f est toujours réel.

(iii) La fonction $f : X \to Y$ est uniformément continue ssi ω_f est continue dans 0.

(iv) Si X est une sous-partie convexe d'un espace normé, alors $\omega_f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est sous-additive, c'est-à-dire

$$\omega_f(\delta_1 + \delta_2) \le \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2) \quad \forall \delta_1, \delta_2 \ge 0 \quad .$$

Pour la preuve, voir l'annexe A.3.3.

(v) Si X est une sous-partie convexe d'un espace normé, alors

$$\omega_f(\delta) \le (n\delta + 1) \cdot \omega_f(1/n)$$

pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$.
Preuve : Considère la décomposition $\delta = \text{Entier}(n\delta) \cdot \frac{1}{n} + \text{Fraction}(n\delta) \cdot \frac{1}{n}$ et utilise la sous-additivité et la monotonie de ω_f.

3.2.6 Théorème : Convergence de convolutions de bons noyaux

Soit $(\Phi_k)_{k=1}^{\infty}$ une famille de bons noyaux dans S^1. Alors :

1. Si $f \in L^{\infty}_{2\pi}$ est continue dans $x_0 \in [0, 2\pi]$, alors $(\Phi_k * f)(x_0) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$.
2. Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors $\Phi_k * f \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformément [16].
3. Supposons que Φ_k est une approximation de Dirac δ_0. Si $1 \le p < \infty$ et $f \in L^p_{2\pi}$ est quelconque, alors $\Phi_n * f \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ par rapport à $\|\cdot\|_{L^p_{2\pi}}$.

Preuve : Soit $C > 0$ tel que $\|\Phi_k\|_{L^1_{2\pi}} \le C \; \forall k \in \mathbb{N}$.

1. Comme f et bornée et Φ_k intégrable, tout $\Phi_k * f$ est bien définie. Noter que

$$(\Phi_k * f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_k(y) \cdot [f(x-y) - f(x)] \, dy$$

et donc

$$|(\Phi_k * f)(x) - f(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_k(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)| \, dy \quad .$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Alors il existe un $\delta > 0$ tel que $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$. On peut donc écrire

$$|(\Phi_k * f)(x) - f(x)| \le \int_{B_\delta(0)} |\Phi_k(y)| \cdot \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{\le \varepsilon} \, dy + \int_{[0,2\pi]\setminus B_\delta(0)} |\Phi_k(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)| \, dy$$

$$\le \varepsilon \underbrace{\int_0^{2\pi} |\Phi_k(y)| \, dy}_{\le C} + 2\, \|f\|_\infty \cdot \underbrace{\int_{[0,2\pi]\setminus B_\delta(0)} |\Phi_k(y)| \, dy}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

et trouve que pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand

$$|(\Phi_k * f)(x) - f(x)| \le 2\varepsilon \quad .$$

Noter que la convergence n'est pas forcement uniforme, comme le choix de $\delta > 0$ dépend du point x.

2. Soit $f :\in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique, alors par 3.2.4 elle est bornée et uniformément continue. Soit ω_f le module de continuité de f, alors par remarques 3.2.5(ii & iii) $\omega_f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est continue dans 0. Car Φ_k, f sont bornées, on sait que $(\Phi_k * f)$ est bien définie. Pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$(\Phi_k * f)(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(s) f(t-s) \, ds - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(s) \, ds \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(s) \, [f(t-s) - f(t)] \, ds$$

et donc

$$|(\Phi_k * f)(t) - f(t)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_k(s)| \cdot |f(t-s) - f(t)| \, ds \quad . \tag{3.2.6.1}$$

16. Voir 1.7.5 pour l'affirmation analogue dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $\delta \in (0, 2\pi)$ fixé pour l'instant. Alors, d'après (3.2.6.1)

$$|(\Phi_k * f)(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} |\Phi_k(s)|\,|f(t-s) - f(t)|\ ds + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\delta,\delta]} |\Phi_k(s)|\,|f(t-s) - f(t)|\ ds$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} |\Phi_k(s)| \cdot 2\,\|f\|_\infty\ ds + \omega_f(\delta) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\delta,\delta]} |\Phi_k(s)|\ ds}_{\leq C}$$

$$= \frac{\|f\|_\infty}{\pi} \int\limits_{[0,2\pi]\setminus B_\delta^o(0)} |\Phi_k(s)|\ ds + C \cdot \omega_f(\delta) \quad ,$$

d'où on déduit

$$\|\Phi_k * f - f\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{\pi} \int\limits_{[0,2\pi]\setminus B_\delta^o(0)} |\Phi_k(s)|\ ds + C \cdot \omega_f(\delta)$$

pour tout $\delta > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, alors par continuité de ω_f dans 0 et le fait que $(\Phi_k)_k$ est une approximation de Dirac δ_0, on trouve toujours un $\delta > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ assez grand, tel que

$$\|\Phi_k * f - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \quad ,$$

d'où on déduit que $\|\varphi_k * f - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. On a d'une part

$$\|\Phi_n * f - f\|_{L^p_{2\pi}}^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(\Phi_n * f)(t) - f(t)|^p\ dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(s) f(t-s)\ ds - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(s) f(t)\ ds \right|^p dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(s) \cdot [f(t-s)\ ds - f(t)]\ ds \right|^p dt$$

$$\overset{\substack{\text{Jensen}\\ 1.2.1}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(s)\,|f(t-s) - f(t)|^p\ ds\ dt$$

$$\overset{\text{Tornelli}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_n(s)\,|f(t-s) - f(t)|^p\ dt}_{\Phi_n(s)\cdot\|\tau_s f - f\|_{L^p_{2\pi}}^p}\ ds \quad ,$$

où $\tau_s f : t \mapsto f(t-s)$. Note que pour l'inégalité de Jensen on a utilisé le fait que $(2\pi)^{-1}\Phi_n(s)\ ds$ est une mesure de probabilité. Soit $\delta \in (0,\pi)$ quelconque, alors

$$\|\Phi_n * f - f\|^p_{L^p_{2\pi}} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(s)\,\|\tau_s f - f\|^p_{L^p_{2\pi}}\;ds + \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} \Phi_n(s)\,\underbrace{\|\tau_s f - f\|^p_{L^p_{2\pi}}}_{\leq 2\|f\|^p_{L^p_{2\pi}}}\;ds$$

$$\leq \sup_{|s|\leq\delta} \|\tau_s f - f\|^p_{L^p_{2\pi}} + \frac{\|f\|^p_{L^p_{2\pi}}}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} \Phi_n(s)\;ds \quad .$$

Par 3.2.3 on sait que $\|\tau_s f - f\|^p_{L^p_{2\pi}} \xrightarrow{s\to 0} 0$. Donc, car $(\Phi_n)_n$ est une approximation de Dirac δ_0 dans S^1, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $0<\delta<\pi$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand tel que

$$\|\Phi_n * f - f\|^p_{L^p_{2\pi}} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad .$$

De cela suit l'affirmation.

□

3.2.7 Exemple d'une approximation de Dirac dans S^1

Considère la famille d'applications 2π-périodiques $\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par

$$\Phi_n(t) := \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \cdot \cos^{2n}\left(\tfrac{t}{2}\right) \quad , \quad n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R} \quad .$$

Alors, $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac δ_0 lisse dans S^1.

Preuve : C'est facile de déduire la forme

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{\binom{2n}{k+n}}{\binom{2n}{n}} \cdot e^{ikt} \quad .$$

Du fait que $\Phi_n \geq 0$ et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_n(t)\;dt = \sum_{|k|\leq n} \frac{\binom{2n}{n+k}}{\binom{2n}{n}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}\;dt}_{\delta_{0k}} = 1 \quad ,$$

on trouve que Φ_n sont des densités de probabilités sur $([0,2\pi], \mathscr{B}([0,2\pi]), \lambda_{2\pi})$. Soit $0<\varepsilon<\pi$ quelconque, alors

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \Phi_n(t)\;dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \Phi_n(t)\;dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi-\varepsilon} \Phi_n(t)\;dt = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \Phi_n(t)\;dt$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \Phi_n(\varepsilon)\;dt \leq \Phi_n(\varepsilon) \quad .$$

Note qu'on a utilisé le fait que Φ_n est décroissante et positive sur $[0,\pi]$. D'après le formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad \text{comme} \qquad n \to \infty \quad ,$$

d'où on obtient

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

et par conséquence

$$\rho_n(\varepsilon) \sim \sqrt{\pi n} \cdot \cos^{2n}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \qquad \text{comme} \qquad n \to \infty \quad .$$

Car $\cos^{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in [0,1)$ cela implique que $\Phi_n(\varepsilon) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \Phi_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ,$$

c'est-à-dire les Φ_n forment vraiment une approximation de Dirac δ_0 dans S^1.

□

3.2.8 Corollaire : Densité des polynômes trigonométriques

Soit $1 \leq p < \infty$ quelconque. Les polynômes trigonométriques $\mathcal{E}_{2\pi} := \operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ forment une partie dense de $\left(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty\right)$ et $\left(L^p_{2\pi}, \|\cdot\|_{L^p_{2\pi}}\right)$.

Preuve : Par exemple 3.2.7 il existe une approximation $(\Phi_k)_{k=1}^\infty$ de Dirac δ_0, appartenant à $\mathcal{E}_{2\pi}$. Par 3.2.6 pour toute $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ on a $\Phi_k * f \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ par rapport à $\|\cdot\|_\infty$ et pour toute $f \in L^p_{2\pi}$ on a $\Phi_n * f \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ par rapport à $\|\cdot\|_{L^p_{2\pi}}$. Par 3.1.5(5) toute $\Phi_k * f$ appartient à $\mathcal{E}_{2\pi}$.

□

3.2.9 Application : Échantillonnage sur S^1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel. Alors, pour toute $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tau_{k\alpha} f \underset{\|\cdot\|_\infty}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \mathcal{F}_0(f) \quad .$$

Preuve : On commence par montrer l'affirmation pour les monômes trigonométriques. Soit $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\tau_{k\alpha}e_m)(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{im(t-k\alpha)} = \frac{e^{imt}}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-im\alpha}\right)^k = \frac{1}{n}e^{im(t-\alpha)}\left[\frac{1-e^{-imn\alpha}}{1-e^{-im\alpha}}\right] \quad .$$

Note que $m\alpha$ n'est pas un multiple de π et donc $e^{-im\alpha} \neq \pm 1$. Par conséquence

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_{k\alpha}e_m(t) - \underbrace{\mathcal{F}_0(e_m)}_{0}e_0(t)\right| = \left|\frac{1}{n}e^{im(t-\alpha)}\left[\frac{1-e^{-imn\alpha}}{1-e^{-im\alpha}}\right]\right| \leq \frac{2}{n}\frac{1}{|1-e^{-im\alpha}|} \quad . \tag{3.2.9.1}$$

De cela, on déduit que

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_{k\alpha}e_m - \mathcal{F}_0(e_m)e_0\right\|_\infty \leq \frac{2}{n}\frac{1}{|1-e^{-im\alpha}|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad . \tag{3.2.9.2}$$

D'autre part

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_{k\alpha}e_0(t) = 1 = \mathcal{F}_0(e_0)e_0 \quad .$$

Donc, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on trouve

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_{k\alpha}e_m \underset{\|\cdot\|_\infty}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \mathcal{F}_0(e_m)e_0 \tag{3.2.9.3}$$

En fait, le résultat s'étend aux polynômes trigonométriques par linéarité. Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ notons

$$\mathcal{A}_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tau_{k\alpha} f \quad .$$

Noter que l'opérateur $\mathcal{A}_n : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathcal{C}_{2\pi},\ \mathcal{A}_n : f \mapsto \mathcal{A}_n(f)$ est linéaire et de norme plus petite que 1, car

$$\|\mathcal{A}_n(f)\|_\infty = \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tau_{k\alpha} f \right\|_\infty \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\|\tau_{k\alpha} f\|_\infty}_{\|f\|_\infty} = \|f\|_\infty \quad .$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par 3.2.8 on peut choisir une $g \in \mathcal{E}_{2\pi}$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Alors,

$$\|\mathcal{A}_n(f) - \mathcal{F}_0(f)e_0\|_\infty \leq \underbrace{\|\mathcal{A}_n(f) - \mathcal{A}_n(g)\|_\infty}_{\leq \|f-g\|_\infty} + \underbrace{\|\mathcal{A}_n(g) - \mathcal{F}_0(g)e_0\|_\infty}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \underbrace{\|\mathcal{F}_0(g)e_0 - \mathcal{F}_0(f)e_0\|_\infty}_{\leq \|g-f\|_\infty} \quad ,$$

c'est-à-dire

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \|\mathcal{A}_n(f) - \mathcal{F}_0(f)e_0\|_\infty \leq 2\varepsilon \quad .$$

Par conséquence, $\mathcal{A}_n(f) \underset{\|\cdot\|_\infty}{\xrightarrow{n\to\infty}} \mathcal{F}_0(f)e_0$.

□

3.3 Convergence des sommes partielles de Fourier

Dans 3.2.8 on a vu que l'espace des polynômes trigonométriques $\mathcal{E}_{2\pi}$ est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ et $L^p_{2\pi}$. Alors, on cherche une *formule facile*, qui nous donne une suite trigonométrique, approchant une fonction donnée quelconque. En particulier, on est intéressé à la question, quand est-ce que la série des sommes partielles de Fourier tend vers la fonction sous-jacente ?

3.3.1 Definition: Noyaux de Dirichlet

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la famille des monômes trigonométriques sur S^1. Pour $N \in \mathbb{N}_0$ on appelle

$$D_N := \sum_{n=-N}^{N} e_n$$

le **noyau de Dirichlet d'ordre** N.

3.3.2 Lemme : Propriétés des noyaux de Dirichlet

Pour $N \in \mathbb{N}_0$ soit $D_N \in \mathcal{C}_{2\pi}$ le noyau de Dirichlet d'ordre N. Alors :

1. D_N est pair et satisfait

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t)\ dt = 1 \quad .$$

2. D_N possède la représentation

$$D_N(t) = \frac{\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin(t/2)} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad . \tag{3.3.2.1}$$

3. Pour $|t| \leq \pi$ on a

$$D_N(t) = \underbrace{\frac{2\sin(Nt)}{t}}_{2N\,\mathrm{sinc}(Nt)} + r_N(t) \quad ,$$

avec $r_N : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ tels que

$$\sup_{N\in\mathbb{N}_0} \|r_N\|_\infty < \infty \quad .$$

4. D_N possède la norme
$$\|D_N\|_{L^1_{2\pi}} = \frac{4}{\pi^2}\ln(N) + \mathcal{O}(1)$$
quand $N \to \infty$.
5. D_N possède les normes
$$\|D_N\|_{L^2_{2\pi}} = \sqrt{2N+1} \quad , \quad \|D_N\|_\infty = 2N+1 \quad .$$
6. Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$ on a $S_N(f) = f * D_N$, où $S_N(f)$ est la somme partielle de Fourier de f d'ordre N.

Preuve :
1. Trivial.
2. Le cas $e^{it} = 1$ est trivial ($D_N(0) = 2N+1$). On suppose donc $e^{it} \neq 1$ et trouve
$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = e^{-iNt}\sum_{n=0}^{2N} e^{int} = e^{-iNt}\cdot\frac{e^{i(2N+1)t}-1}{e^{it}-1}$$
$$= e^{-iNt}\cdot\frac{e^{i(2N+1)\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}}\cdot\frac{e^{i(2N+1)\frac{t}{2}} - e^{-i(2N+1)\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin(t/2)} \quad .$$
3. Le cas $t = 0$ est trivial. On suppose donc $t \neq 0$ et trouve
$$D_N(t) = \frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin(t/2)} = \frac{\sin(Nt)\cdot\cos(t/2) + \sin(t/2)\cdot\cos(Nt)}{\sin(t/2)}$$
$$= \sin(Nt)\cdot\mathrm{cotan}(t/2) + \cos(Nt) = \sin(Nt)\cdot\left[\frac{2}{t} + \rho(t)\right] + \cos(Nt)$$
où $\rho : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ est bornée et indépendant de N. Donc
$$D_N(t) = \frac{2\sin(Nt)}{t} + r_N(t)$$
avec $r_N(t) := \rho(t)\cdot\sin(Nt) + \cos(Nt)$. Note que $\|r_N(t)\|_\infty \leq \|\rho\|_\infty + 1$.
4. Suit de (3).
5. Comme les monômes trigonométriques e_n sont orthonormées dans $L^2_{2\pi}$, on trouve
$$\|D_N\|_2^2 = \langle D_N, D_N\rangle_{L^2_{2\pi}} = \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\|e_n\|_2^2}_{1} = 2N+1 \quad .$$
De plus, on a la majoration
$$|D_N(t)| \leq \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\|e_n\|_\infty}_{1} = 2N+1 \quad .$$
Comme $D_N(0) = 2N+1$, on conclut $\|D_N\|_\infty = 2N+1$.
6. Suit de la linéarité de la convolution et propriété 3.1.5(5) des e_n.

□

3.3.3 Definition: Noyau de Fejér

Pour $N \in \mathbb{N}_0$ soit $D_N \in \mathcal{C}_{2\pi}$ le noyau de Dirichlet d'ordre N. On appelle
$$K_N := \frac{1}{N}\cdot\sum_{n=0}^{N-1} D_n$$
le **noyau de Fejér** d'ordre N.

3.3.4 Lemme : Propriétés des noyaux de Fejér

Pour $N \in \mathbb{N}_0$ soit $K_N \in \mathcal{C}_{2\pi}$ le noyau de Fejér d'ordre N. Alors :

1. K_N possède les représentations

$$K_N = \sum_{n=-N}^{N} \left[1 - \frac{|n|}{N}\right] \cdot e_n \tag{3.3.4.1}$$

et

$$K_N(t) = \frac{1}{N} \left[\frac{\sin\left(\frac{Nt}{2}\right)}{\sin(t/2)}\right]^2 \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad . \tag{3.3.4.2}$$

2. K_N est une densité de probabilité sur $(S^1, \lambda_{2\pi})$, c'est-à-dire $K_N \geq 0$ et $\|K_N\|_{L^1_{2\pi}} = 1$.
3. Pour tout $0 < \delta \leq \pi$ on a

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\delta<|x|\leq\pi} K_N(t)\ dt = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire la famille $(K_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ est une approximation de Dirac δ_0 sur S^1.
4. Si on pose pour $f \in L^1_{2\pi}$

$$\sigma_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) \quad ,$$

alors

$$\sigma_N(f) = f * K_N = \sum_{n=-N}^{N} \left[1 - \frac{|n|}{N}\right] \cdot \mathcal{F}_n(f) \cdot e_n \quad .$$

Preuve :

1. On commence par la définition de K_N et trouve

$$K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^{n} e_k = \frac{1}{N} \sum_{|k|\leq N-1} \left[\sum_{|k|\leq n\leq N-1} 1\right] \cdot e_k$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{|n|\leq N-1} (N - |n|) \cdot e_n = \sum_{|n|\leq N-1} \left[1 - \frac{|n|}{N}\right] \cdot e_n = \sum_{|n|\leq N} \left[1 - \frac{|n|}{N}\right] \cdot e_n \quad .$$

De plus, en utilisant la représentation 3.3.2(2) de D_N on trouve

$$K_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right]}{\sin(t/2)} = \frac{1}{N\sin(t/2)} \cdot \Im\left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}\right]$$

$$= \frac{1}{N\sin(t/2)} \Im\left[e^{it/2}\frac{1 - e^{itN}}{1 - e^{it}}\right] = \frac{\Re\left[1 - e^{itN}\right]}{2N\sin^2(t/2)} = \frac{1 - \cos(Nt)}{2N\sin^2(t/2)} = \frac{1}{N}\left[\frac{\sin\left(\frac{Nt}{2}\right)}{\sin(t/2)}\right]^2 \quad .$$

2. Par (1) on sait que $K_N \geq 0$. Donc $\|K_N\|_{L^1_{2\pi}} = \mathcal{F}_0(K_N) = 1$ d'après affirmation 3.3.2(1) sur D_N.
3. Par (1) on trouve pour $|\delta| \leq \pi$:

$$0 \leq \int\limits_{\delta\leq|x|\leq\pi} K_N(t)\ dt \leq \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

4. Suit du fait que $S_N(f) = f * D_N$ et de la représentation (3.3.4.1).

□

3.3.5 Théorème : Existence de fonctions *mauvaises*

Il existe une fonction continue, 2π-périodique $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que la série de ses sommes partielles de Fourier $S_N(f)$ diverge en 0, c'est-à-dire

$$\sup_{N\in\mathbb{N}_0} |S_N(f)(0)| = \infty \quad .$$

En particulier, $S_N(f)$ ne converge ni ponctuellement ni uniformément vers f.

Preuve : Voir [2] et [3]. Voir aussi A.4.3 pour un exemple explicite.

3.3.6 Théorème de Fejér : Convergence des moyennes sommes partielles de Fourier

Pour $f \in L^1_{2\pi}$ et $N \in \mathbb{N}_0$ on pose

$$\sigma_N(f) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) \quad . \tag{3.3.6.1}$$

où $S_n(f)$ est la somme partielle de Fourier de f d'ordre n. Alors :

1. Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ on a $\|\sigma_N(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty$ $\forall N \in \mathbb{N}_0$ et
$$\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$
2. Pour $1 \le p < \infty$ et $f \in L^p_{2\pi}$ on a $\|\sigma_N(f)\|_{L^p_{2\pi}} \le \|f\|_{L^p_{2\pi}}$ $\forall N \in \mathbb{N}_0$ et
$$\|\sigma_N(f) - f\|_p \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

Preuve : Soit $f \in L^1_{2\pi}$ quelconque. Par 3.3.4(4) on sait que $\sigma_N(f) = f * K_N$, où K_N est le noyau de Fejér d'ordre N. Par 3.3.4(2) on sait que tout K_N est une densité de probabilité sur $(S^1, \lambda_{2\pi})$.
Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors évidement

$$\|\sigma_N(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty \cdot \underbrace{\|K_N\|_1}_{1} = \|f\|_\infty \quad .$$

De même si $f \in L^p_{2\pi}$, par 3.1.4(3) $\|f * K_N\|_{L^p_{2\pi}} \le \|f\|_{L^p_{2\pi}}$.
Par 3.3.4 on sait que les K_N forment une approximation de Dirac δ_0 dans S^1. Par théorème 3.2.6 sur les convolutions d'approximations de Dirac suivent les affirmations sur la convergence des $\sigma_N(f)$.

□

3.3.7 Conséquences : Convergence des sommes partielles de Fourier

1. Soit $\Delta \subseteq \mathbb{Z}$ n'importante quel. Alors
$$\mathcal{E}_{2\pi,\Delta} := \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{e_n : n \in \Delta\}$$
est dense dans
$$\mathcal{C}_{2\pi,\Delta} := \{f \in \mathcal{C}_{2\pi} : \operatorname{spec}(f) \subseteq \Delta\}$$
par rapport à $\|\cdot\|_\infty$. En particulier, $\mathcal{E}_{2\pi} := \mathcal{E}_{2\pi,\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors, si le limite $\lim_{N\to\infty} S_N(f)(t_0)$ existe, il est égal à $f(t_0)$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ quelconque. Si la série $S_N(f)$ converge uniformément, son limite est égale à f.
4. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ quelconque. Si la série $S_N(f)$ converge normalement [17], elle converge uniformément vers f.

17. Par rapport à $\|\cdot\|_\infty$. Noter que $S_N(f)$ converge normalement ssi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}_n(f)| < \infty$.

5. Les $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une base orthonormale dans $L^2_{2\pi}$. En particulier, si $f \in L^2_{2\pi}$ alors

$$\|f\|^2_{L^2_{2\pi}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}_n(f)|^2 \tag{3.3.7.1}$$

et

$$\|S_N(f) - f\|_{L^2_{2\pi}} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad . \tag{3.3.7.2}$$

Noter que cela est une version forte du théorème de Fejér 3.3.6(2) dans le cas $p = 2$.

6. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors $S_N(f)$ converge normalement et donc uniformément vers f.

Preuve :

1. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi,\Delta}$ et $\sigma_N(f)$ définit comme (3.3.6.1). Alors par 3.3.4(4) $\sigma_N(f) \in \mathcal{E}_{2\pi,\Delta}$ pour tout $N \in \mathbb{N}_0$. De plus, par théorème 3.3.6(1) $\sigma_N(f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformément.
2. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $S_N(f)(t_0) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$. Alors, par Cesàro aussi $\sigma_N(f)(t_0) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$. D'autre part, par théorème 3.3.6(1) $\sigma_N(f)(t_0) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(t_0)$. Donc $\alpha = f(t_0)$.
3. Suit d'affirmation (2).
4. Si $S_N(f)$ converge normalement, alors comme $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est complet elle converge uniformément. Par (3) son limite est exactement f.
5. On sait déjà que $L^2_{2\pi}$ est un espace de Hilbert. De plus, les $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont orthonormaux entre eux dans $L^2_{2\pi}$. Par théorème 3.3.6(2), $\mathcal{E}_{2\pi}$ est dense dans $L^2_{2\pi}$ et donc $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base orthonormale. La relation (3.3.7.1) est rien autre que l'identité de Parseval. De même, la relation (3.3.7.2) est en fait une caractérisation d'une base orthonormale.
6. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ dans $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors $\mathcal{F}_n(f') = in \cdot \mathcal{F}_n(f)$ avec $f' \in L^2_{2\pi}$. Par (5) on obtient donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \cdot |\mathcal{F}_n(f)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}_n(f')|^2 = \|f'\|^2_{L^2_{2\pi}} < \infty \quad .$$

Or, par Cauchy-Schwarz

$$\sum_{|n|\le N} |\mathcal{F}_n(f)| \le \underbrace{\sqrt{\sum_{|n|\le N} \frac{1}{n^2}}}_{\le \text{const} < \infty} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{|n|\le N} n^2 \, |\mathcal{F}_n(f)|^2}}_{\le \text{const} < \infty} \le \text{const} < \infty \quad ,$$

c'est-à-dire la série $S_N(f)$ est normalement convergente. Par (4) $S_N(f)$ converge uniformément vers f.

□

3.3.8 Corollaire : Unicité de fonctions 2π-périodiques

1. Deux $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ sont égales ssi tous ses coefficients de Fourier sont égales.
2. Deux $f, g \in L^1_{2\pi}$ sont égales presque partout ssi tous ses coefficients de Fourier sont égales.

Par conséquence, le morphisme $\mathcal{F} : L^1_{2\pi} \to l_0(\mathbb{C})$ défini dans 3.1.8 est injective.

Preuve :

1. La direction "$\Rightarrow$" est triviale. Soient $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ tels que $\mathcal{F}_n(f) = \mathcal{F}_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\sigma_N(f) = \sigma_N(g)$ pour tout $N \in \mathbb{N}_0$. Par 3.3.6 $\sigma_N(f) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} f$ et $\sigma_N(g) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} g$ uniformément. Par unicité de la limite $f = g$.
2. De façon similaire.

□

3.3.9 Conséquence : Théorème de Weierstrass

Toute fonction complexe, continue sur un intervalle fini $[a, b] \in \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Preuve : En utilisant des transformations affines on peut supposer que $[a, b] = [-1, 1]$. Soit $F : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ continue et $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ définie comme $f(t) := F(\cos(t))$. Alors, f est continue, 2π-périodique et paire. Pour $N \in \mathbb{N}_0$ soit

$$\sigma_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$$

définie comme dans théorème 3.3.6. Par ce théorème, on sait que $(\sigma_N(f))_N$ converge uniformément vers f. Si $a_n(f) := 2\langle\cos(n\cdot), f\rangle_{2\pi}$, $b_n(f) := 2\langle\sin(n\cdot), f\rangle_{2\pi}$ sont définies comme dans 3.1.6, alors on sait par 3.1.6 et remarque 3.1.6(ii) que $\sigma_N(f)$ est toujours une combinaison linéaire des $\cos(n\cdot)$, avec $n \in \mathbb{N}_0$. On sait que tout $\cos(n\cdot)$ est en fait un polynôme en $\cos()$, c'est-à-dire $\sigma_N(f)$ est un polynôme P_N en $\cos()$. Donc

$$\sup_{x\in[-1,1]} |F(x) - P_N(x)| = \sup_{t\in[0,2\pi]} |F(\cos(t)) - P_N(\cos(t))| = \sup_{t\in[0,2\pi]} |f(t) - \sigma_N(f)(t)| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ,$$

ce qui prouve l'affirmation.

□

3.3.10 Théorème de Dirichlet

Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in [0, 2\pi]$ telle que les limites

$$\lim_{t\to 0^+} f(x_0 + t) =: f^+ \quad , \quad \lim_{t\to 0^+} f(x_0 - t) =: f^-$$

existent et il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(x_0 + t) - f^+}{t} \right| dt < \infty \quad , \quad \int_0^\delta \left| \frac{f(x_0 - t) - f^-}{t} \right| dt < \infty \quad .$$

Alors la série $S_N(f)$ converge en x_0 vers $\frac{1}{2}(f^+ + f^-)$.

Preuve : On suppose que $x_0 = 0$. Soit D_N le noyau de Dirichlet d'ordre N. Alors

$$\underbrace{S_N(f)}_{D_N * f}(0) - \frac{1}{2}(f^+ + f^-) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(-t) D_N(t)\, dt - \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^+ + f^-) \cdot D_N(t)\, dt$$

$$\overset{\substack{D_N\\ \text{paire}}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[f(t) + f(-t) + f^+ + f^-\right] D_N(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{f(t) - f^+ + f(-t) - f^-}{\sin(t/2)}}_{h(t)} \cdot \sin\left[\left(N + \tfrac{1}{2}\right) t\right] \, dt \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

où on a utilisé lemme 3.1.7 et le fait que $h : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ est intégrable.

□

Remarque : En pratique, on vérifie qu'il existent $f^+, f^- \in \mathbb{C}$ tels que les limites

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[f(x_0 + t) - f^+\right] \quad , \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[f(x_0 - t) - f^-\right]$$

existent, d'où suivent les suppositions du théorème.

4 Analyse Fourier sur $\mathbb{R}^n$

4.1 Préliminaires

4.1.1 Definition: Transformation de Fourier

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mesurable on définit sa **transformation de Fourier** $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ par

$$\mathcal{F}(f)(k) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-ikx} \, dx \quad , \quad k \in \mathbb{R}^n$$

(si existante).

Remarques

(i) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}(f)$ existe partout et est bornée par $\|f\|_1$. A part cela, $\mathcal{F}(f)$ n'est pas nécessairement intégrable.

Exemples

(i) Pour $r > 0$ on a

$$\mathcal{F}\left(\tfrac{1}{2r} \cdot 1_{[-r,r]}\right)(t) = \operatorname{sinc}(rt) \quad .$$

4.1.2 Propriétés de la transformation de Fourier

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $a, k \in \mathbb{R}^n$. Alors :

1. $\mathcal{F}(x \mapsto f(-x))(k) = \mathcal{F}(f)(-k)$.
2. $\mathcal{F}(\overline{f})(k) = \overline{\mathcal{F}(f)}(-k)$.
3. $\mathcal{F}(x \mapsto f(x+a))(k) = e^{ika}\mathcal{F}(f)(k)$.
4. $\mathcal{F}(x \mapsto f(x)e^{iax})(k) = \mathcal{F}(f)(k-a)$.
5. Si f est de $\mathcal{C}^1$ (par morceaux) et telle que $f(x) \overset{\|x\|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\mathcal{F}(\partial_j f)(k) = ik_j \cdot \mathcal{F}(f)(k)$.

4.1.3 Théorème : Sommatoire de Poisson

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}(f)(n)| < \infty$ et qu'il existe $M > 0,\ \alpha > 1$ tels que

$$|f(x)| \leq M \cdot \big[1 + |x|\big]^{-\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad . \tag{4.1.3.1}$$

Alors :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n) \quad .} \tag{4.1.3.2}$$

Preuve : Définissons $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ comme

$$F(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.1.3.3}$$

Alors, sur toute compacte $K \subseteq \mathbb{R}$, on a $\|\cdot + 2\pi n\|_{\infty,K} \in \mathcal{O}(n)$ quand $n \to \infty$ et donc par supposition $\|f(\cdot + 2\pi n)\|_{\infty,K} \in \mathcal{O}(n^{-\alpha})$ pour $n \to \infty$. Par conséquence, la série (4.1.3.3) converge normalement sur toute compacte K et donc ponctuellement vers la continue F. Noter que F est 2π-périodique, c'est-à-dire $F \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Ses coefficients de Fourier sont donnés par

$$\mathcal{F}_n(F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi m)\cdot e^{-int}\,dt \overset{(A.4.4)}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} f(t+2\pi m)\cdot e^{-int}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} f(u)\cdot e^{-inu}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(u)\cdot e^{-inu}\,du = \frac{1}{2\pi}\cdot\mathcal{F}(f)(n) \quad .$$

Or, comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\mathcal{F}(f)(n)| < \infty$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_n(F)\cdot e_n$ converge normalement et donc par 3.3.7(4) uniformément vers F. Donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_n(F)\cdot e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(f)(n)\cdot e^{inx} \quad .$$

En posant $x = 0$, on en déduit l'affirmation (4.1.3.2).

□

4.1.4 Lemme : Continuité uniforme de la transformée de Fourier

Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pour $k, h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$|\mathcal{F}(f)(k+h) - \mathcal{F}(f)(k)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\cdot\left|e^{-ihx} - 1\right|\,dx \quad . \tag{4.1.4.1}$$

Noter que l'intégrant dans (4.1.4.1) tend ponctuellement vers 0 quand $h \to 0$, et cela à une vitesse indépendante de k. De plus,

$$|f(x)|\cdot\left|e^{-ihx} - 1\right| \le 2\,|f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

est une majoration intégrable, indépendante de h. Donc, par le théorème de convergence dominée on conclut que

$$\lim_{h\to 0}|\mathcal{F}(f)(k+h) - \mathcal{F}(f)(k)| \le \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{h\to 0}|f(x)|\cdot\left|e^{-ihx} - 1\right|\,dx = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire $\mathcal{F}(f)$ est continue. Noter que la vitesse de convergence ne dépende pas de k, c'est-à-dire $\mathcal{F}(f)$ est en fait uniformément continue.

□

4.1.5 Théorème : La transformation de Fourier comme morphisme d'algèbres

La transformation de Fourier $\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}^n), +, *) \to (\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), +, \cdot)$ est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres [18], c'est-à-dire $\mathbb{C}$-linéaire et satisfaisant

$$\boxed{\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g) \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad .}$$

De plus, comme opérateur linéaire $\left(L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1\right) \to \left(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty\right)$ elle est continue de norme 1.

18. Noter que $\left(L^1(\mathbb{R}^n), *\right)$ ne possède pas d'élément d'unité. Dans la théorie des distributions, ce serait la distribution de Dirac δ_0, dont la transformation de Fourier serait la fonction constante 1.

Preuve : Se rappeler que par remarque 1.6.1(2) l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$ est vraiment une $\mathbb{C}$-algèbre par rapport à la convolution $*: L^1 \times L^1 \to L^1$. Par remarque 4.1.1(i) tout $\mathcal{F}(f)$, où $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, est bornée par la valeur $\|f\|_1$, donc $\|\mathcal{F}\| \leq 1$. D'autre part, si $0 \leq f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est quelconque, on trouve que $\mathcal{F}(f)(0) = \|f\|_1$ et en particulier $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \geq \|f\|_1$, c'est-à-dire $\|\mathcal{F}\| \geq 1$. Donc $\|\mathcal{F}\| = 1$. Par 4.1.4 on sait que $\mathcal{F}(f)$ est continue, donc $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}_b$. Il reste à voir la compatibilité avec la convolution. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\mathcal{F}(f * g)(k) = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) \cdot e^{-ikx}\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot g(x-y)\ dy\ dx \quad .$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-ikx} f(y) \cdot g(x-y)\right|\ dy\ dx \overset{\text{Tornelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\ dx\ dy = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty \quad ,$$

on sait par Fubini

$$\mathcal{F}(f * g)(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} g(x-y)\ dx\ dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot e^{-iky} \mathcal{F}(g)(k) = \mathcal{F}(f)(k) \cdot \mathcal{F}(g)(k) \quad ,$$

c'est-à-dire $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$.

□

4.2 L'espace de Schwarz

4.2.1 Definition: Décroissance rapide et la classe de Schwarz

Soient E, F $\mathbb{K}$-espaces de Banach. Une fonction $f : E \to F$ est dit de **décroissance rapide** si pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ il existe un $C_n > 0$ tel que

$$\|f(x)\|_F \leq C_n \cdot \|x\|_E^{-n} \quad \forall x \in E \quad .$$

Équivalent, f est de décroissance rapide ssi

$$\sup_{x \in E} \left[\, \|x\|_E^n \cdot \|f(x)\|_F \,\right] < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Une fonction $f : E \to F$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est dans la **classe de Schwarz** $\mathscr{S}(E, F)$ si f et tous ses dérivées sont de décroissance rapide. On note $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) := \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ la classe de Schwarz sur $\mathbb{R}^n$.

Exemples

(i) Toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ lisse à support compact est dans la classe de Schwarz.

(ii) La fonction $x \mapsto e^{-\|x\|^2}$ est dans la classe de Schwarz.

Remarques

(i) Toute fonction rapidement décroisante est bornée.

(ii) L'espace des fonctions $E \to F$ rapidement décroisantes est linéaire.

(iii) Pour tout $R \geq 0$ donné, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est rapidement décroisante ssi

$$\sup_{\|x\| \geq R} \|x\|^n \cdot \|f(x)\| < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

(iv) Pour tout $R \geq 0$ donné, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est rapidement décroisante ssi

$$\sup_{\|x\| \geq R} |P(x) \cdot f(x)| < \infty \quad \forall P \in \mathbb{C}[X_1, .., X_n] \quad .$$

(v) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est rapidement décroisante, alors $P \cdot f$ est aussi rapidement décroisante pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, .., X_n]$.

(vi) Pour tout $\alpha > 0$ donné, $f : E \to \mathbb{K}$ est rapidement décroisante ssi f^α est également.

(vii) L'espace des fonctions $E \to \mathbb{K}$ rapidement décroisantes est fermé sous multiplications. En particulier, tout polynôme d'une fonction rapidement décroisante est lui même rapidement décroisant.

(viii) Soit $1 \leq p \leq \infty$ n'importante quel. Alors, toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ rapidement décroisante est dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ix) Toute $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ est dans la classe de Schwarz ssi $P \cdot Q(\partial) f$ est bornée pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X_1, .., X_n]$.

4.2.2 Propriétés élémentaires de la classe de Schwarz

Soit $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ la classe de Schwarz sur $\mathbb{R}^n$. Alors :

1. $\mathscr{S}(R^n)$ est un espace vectoriel.
2. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre, c'est-à-dire stable sous multiplications.
3. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme et $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $P(f) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
4. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable pas dérivation, c'est-à-dire si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ on a $\partial_\alpha f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
5. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par translation, c'est-à-dire si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$, alors $(x \mapsto f(x+a))$ est aussi dans la classe de Schwarz.
6. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

4.2.3 Lemme : Transformation de Fourier d'une dérivée

Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dans la classe de Schwarz. Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, .., X_n]$ on a [19]

$$\boxed{\mathcal{F}\left[P\left(\partial_1, .., \partial_n\right) f\right](k) = P(ik_1, .., ik_n) \cdot \mathcal{F}(f)(k) \quad .} \tag{4.2.3.1}$$

Preuve : Utiliser l'intégration partielle.

□

4.2.4 Lemme : Dérivée de la transformation de Fourier

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ rapidement décroisante. Alors, sa transformation de Fourier est dérivable avec dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial k^j} \mathcal{F}(f)(k) = \mathcal{F}\left[x \mapsto i x_j f(x)\right](k) \quad \forall j \in \{1, .., n\} \quad . \tag{4.2.4.1}$$

Plus généralement, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, .., X_n]$ on a

$$\boxed{P(\partial)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(x \mapsto P(ix) f(x)) \quad .} \tag{4.2.4.2}$$

En particulier, $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}^\infty$.

Preuve : Par 4.2.2(3), pour l'affirmation (4.2.4.2) il suffit de montrer l'affirmation (4.2.4.1). On a

$$\partial_j \mathcal{F}(f)(k) = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ikx} \cdot \frac{1}{h}\left[e^{ihx_j} - 1\right] \, dx \quad . \tag{4.2.4.3}$$

Noter que

$$\left| \frac{1}{h}\left[e^{ihx_j} - 1\right] \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \sup_{y \in [0, x_j]} \left| \partial_{x_j} \left(x_j \mapsto e^{ihx_j}\right) \Big|_y \right| \cdot |x_j - 0| = |x_j| \quad .$$

19. Où on définit $P(\partial_1, .., \partial_n) := \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}} a_{\mathbf{k}} \cdot \partial_1^{k_1} .. \partial_n^{k_n}$ pour $P(X_1, .., X_n) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}} a_{\mathbf{k}} \cdot X_1^{k_1} .. X_n^{k_n}$.

Donc, le module de l'intégrant dans (4.2.4.3) est toujours majoré par l'intégrable $x \mapsto |x_j \cdot f(x)|$. Comme $e^{ihx_j} \xrightarrow{h\to 0} 1$ pour tout $x_j \in \mathbb{R}$, par Lebesgue on conclut que

$$\partial_j \mathcal{F}(f)(k) = \int_{\mathbb{R}^n} ix_j f(x) e^{ikx}\, dx = ix_j \cdot \mathcal{F}(f)(k) \quad .$$

□

4.2.5 Théorème : La transformation de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est une bijection $\mathcal{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ avec inverse

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(k) \cdot e^{ikx}\, dk \quad . \tag{4.2.5.1}$$

Preuve : Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ n'importante quelle. Alors, $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est bornée. Par 4.2.4 on sait qu'elle est lisse. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X_1, .., X_n]$ deux polynômes n'importante quels. Alors, par 4.2.4 on sait que

$$Q(\partial)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}\left[Q(i\cdot)f\right] \quad .$$

Comme $Q(i\cdot)f$ est encore dans l'espace de Schwarz, par 4.2.3 on sait que

$$P \cdot Q(\partial)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}\left[P(-i\partial)(Q(i\cdot)f)\right] \quad .$$

Comme $P(-i\partial)\left[Q(i\cdot)f\right]$ est aussi dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et donc en particulier intégrable, elle possède une transformation de Fourier bornée. Donc, $P \cdot Q(\partial)\mathcal{F}(f)$ est bornée pour tous polynômes P, Q, donc $\mathcal{F}(f)$ est par remarque 4.2.1(ix) dans la classe de Schwarz.

Il reste à montrer que (4.2.5.1) est l'inverse de $\mathcal{F}$. Par la relation symétrique entre $\mathcal{F}$ et (4.2.5.1), il suffit de montrer que (4.2.5.1) est inverse à $\mathcal{F}$ par gauche, c'est-à-dire que

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} dk\; e^{ikx} \cdot \mathcal{F}(f)(k)$$

pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour $s > 0$ fixé on considère l'intégral

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} dk\; \mathcal{F}(f)(k) \cdot e^{ikx} \cdot e^{-s\|k\|^2} &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} dk \int_{\mathbb{R}^n} dy\; f(y) \cdot e^{ik(x-y)} \cdot e^{-s\|k\|^2} \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} dy\; f(y) \int_{\mathbb{R}^n} dk\; e^{ik(x-y)} \cdot e^{-s\|k\|^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} G_s(x-y) f(y)\, dy = (G_s * f)(x) \quad ,
\end{aligned}$$

avec

$$G_s(z) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikz} \cdot e^{-s\|k\|^2}\, dk = \frac{e^{-\frac{\|k\|^2}{4s}}}{(4\pi s)^{\frac{n}{2}}} \quad ,$$

Noter que $G_s(z)$ est exactement la densité de probabilité de la loi normale sur $\mathbb{R}^n$ avec matrice de variances $\operatorname{diag}(2s, .., 2s)$. Par 1.7.3 $(G_s)_{s>0}$ est une approximation de Dirac δ_0 dans $\mathbb{R}^n$. Par 1.7.6 on sait que $G_s * f \overset{s\to 0^+}{\longrightarrow} f$ ponctuellement, c'est-à-dire $(G_s * f)(x) \overset{s\to 0^+}{\longrightarrow} f(x)$. D'autre part, par convergence dominée on sait que

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} dk\; \mathcal{F}(f)(k) \cdot e^{ikx} \cdot e^{-s\|k\|^2} \overset{s\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(k) \cdot e^{ikx}\, dk \quad ,$$

d'où on déduit que

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(k) \cdot e^{ikx} \, dk = f(x) \quad .$$

$\square$

Conséquences

(i) Pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ on a $\mathcal{F}^{-1}(f)(k) = (2\pi)^{-n} \cdot \mathcal{F}(f)(-k)$.

(ii) Pour $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = (2\pi)^{-n} \cdot \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) \quad .$$

Preuve : Utiliser 4.1.5 et (i).

Remarques

(i) Dans la preuve de la bijectivité dans 4.2.5, on n'a utilisé que le fait que f est intégrable, continue et bornée et $\mathcal{F}(f)$ est intégrable. De même façon, on peut montrer que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f) = f$ si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

4.2.6 Théorème : Formule de Plancherel sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\boxed{\|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = (2\pi)^n \cdot \|f\|_2^2 \quad .}$$

Preuve : Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. On pose $\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$, alors $\tilde{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors,

$$\mathcal{F}(\tilde{f})(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) \cdot e^{-ikx} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)} \cdot e^{-ikx} \, dx = \overline{\mathcal{F}(f)}(k) \quad . \tag{4.2.6.1}$$

Posons $h := f * \tilde{f}$, alors

$$\mathcal{F}(h) \overset{4.1.5}{=} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(\tilde{f}) \overset{(4.2.6.1)}{=} |\mathcal{F}(f)|^2 \quad . \tag{4.2.6.2}$$

Donc

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx = h(0) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(h))(0) \overset{(4.2.6.2)}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f)(k)|^2 \, dk \quad .$$

$\square$

4.2.7 Application : Principe d'incertitude de Heisenberg

Soit $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telle que $\|\Psi\|_2 = 1$. Alors

$$\mathbb{V}(\Psi) \cdot \mathbb{V}(\mathcal{F}(\Psi)) := \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot |\Psi(x)|^2 \, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} k^2 \cdot |\mathcal{F}(\Psi)(k)|^2 \, dk \geq \frac{\pi}{2} \quad ,$$

avec égalité si Ψ est de la forme $\Psi = Ae^{-\beta x^2}$ où $|A|^2 = \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}$.

Preuve : On utilise Hölder 1.2.2 et Plancherel 4.2.6 pour obtenir

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |\Psi(x)|^2 \, dx \overset{\text{IPP}}{=} \int_{\mathbb{R}} x \cdot \frac{d}{dx} |\Psi(x)|^2 \; dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}} x \, |\Psi(x)| \cdot |\Psi'(x)| \; dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} 2 \left[\int x^2 \cdot |\Psi(x)|^2 \; dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \int |\Psi'(x)|^2 \; dx \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{\text{Plancherel}}{=} 2 \left[\int x^2 \cdot |\Psi(x)|^2 \; dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int |\mathcal{F}(\Psi')(k)|^2 \; dk \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{(4.2.3.1)}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left[\int x^2 \cdot |\Psi(x)|^2 \; dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int k^2 \cdot |\mathcal{F}(\Psi)(k)|^2 \; dk \right]^{\frac{1}{2}} \quad .$$

$\square$

4.2.8 Exemple : Intégraux de produits de sinc

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}(t) \operatorname{sinc}\left(\tfrac{t}{3}\right) \cdot .. \cdot \operatorname{sinc}\left(\tfrac{t}{2n+1}\right) \; dt = \frac{\pi}{2^n} \int_{[-1,1]^n} 1_{\left|\frac{y_1}{3} + .. + \frac{y_n}{2n+1}\right| \leq 1} \, dy_1..dy_n \quad . \tag{4.2.8.1}$$

De plus, l'intégral ci-dessus vaut π pour $1 \leq n \leq 6$, mais pas pour $n \geq 7$.

Preuve : Pour tout $\lambda > 0$ on considère les fonctions intégrables $u_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, données par

$$u_\lambda := \frac{1}{2\lambda} \cdot 1_{[-\lambda,\lambda]} \quad .$$

Ils possèdent la transformation de Fourier

$$\mathcal{F}(u_\lambda)(k) = \operatorname{sinc}(\lambda k) \quad , \quad k \in \mathbb{R}, \; \lambda > 0 \quad .$$

On a donc

$$I_n := \int_{\mathbb{R}} \prod_{k=0}^{n} \operatorname{sinc}\left(\tfrac{t}{2k+1}\right)\ dt = \int_{\mathbb{R}} \prod_{k=0}^{n} \mathcal{F}\left(u_{\frac{1}{2k+1}}\right)(t)\ dt \overset{(4.1.5)}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\left[\mathop{\Large *}_{k=0}^{n} u_{\frac{1}{2k+1}}\right](t)\ dt$$

$$= 2\pi \cdot \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\mathop{\Large *}_{k=0}^{n} u_{\frac{1}{2k+1}}\right]\right](0) \overset{(\clubsuit)}{=} 2\pi \cdot \left[\mathop{\Large *}_{k=0}^{n} u_{\frac{1}{2k+1}}\right](0)$$

$$= 2\pi \int_{\mathbb{R}^n} u_1(0 - x_1 - .. - x_n) \cdot u_{\frac{1}{3}}(x_1) \cdot .. \cdot u_{\frac{1}{2n+1}}(x_n)\ dx_1..dx_n \qquad \Big| \qquad y_k := (2k+1)x$$

$$= 2\pi \int_{\mathbb{R}^n} u_1\left[0 - \tfrac{y_1}{3} - .. - \tfrac{y_n}{2n+1}\right] \cdot \underbrace{u_1(y_1)}_{\frac{1}{2}1_{[-1,1]}(y_1)} \cdot .. \cdot u_n(y_n)\ dy_1..dy_n$$

$$= \frac{\pi}{2^n} \int_{[-1,1]^n} 1_{[-1,1]}\left[\tfrac{y_1}{3} + \cdots + \tfrac{y_n}{2n+1}\right]\ dy_1..dy_n \quad .$$

Noter qu'on a utilisé que la fonction $t \mapsto \prod_{k=0}^{n} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2k+1}\right)$ est intégrable. En fait, elle est localement intégrable et de plus

$$\int_{|t|\geq 1} \left|\prod_{k=0}^{n} \operatorname{sinc}\left(\tfrac{t}{2k+1}\right)\right|\ dt \leq \int_{|t|\geq 1} \prod_{k=0}^{n} \left|\frac{2k+1}{t}\right|\ dt = 2\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} < \infty \quad .$$

De plus, on a utilisé à l'étape ($\clubsuit$) remarque 4.2.5(i) et le fait que $\mathop{\Large *}_{k=0}^{n} u_{\frac{1}{2k+1}}$ est continué, bornée, intégrable avec transformée de Fourier intégrable (par la remarque ci-dessus).
On a donc montré l'identité (4.2.8.1). Noter que l'intégral I_n peut être (sauf le facteur π) interprété comme espérance de la variable aléatoire $1_{|\frac{y_1}{3}+..+\frac{y_n}{2n+1}|\leq 1}$ sur le cube $[-1,1]^n$ par rapport à la loi uniforme. Pour $1 \leq n \leq 6$ et $-1 \leq y_1, .., y_n \leq 1$ on peut majorer

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{2k+1}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|y_k|}{2k+1} \leq \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + .. + \frac{1}{13} \lesssim 0.96 < 1 \quad ,$$

pour ce que l'intégrant au droit de (4.2.8.1) est toujours égal à 1 et donc $I_n = \pi$. Par ailleurs, pour $n \geq 7$ la fonction continue

$$[-1,1]^n \to \mathbb{R} \quad , \quad (y_1, .., y_n) \mapsto \left|\tfrac{y_1}{3} + .. + \tfrac{y_n}{2n+1}\right|$$

atteint pour $y_1, .., y_n = 1$ une valeur plus grande que 1. Par continuité cela est le cas dans un voisinage de $(1, .., 1)$, qui possède mesure non-nulle. Par conséquence, l'intégrant au droit de (4.2.8.1) est zéro sur une partie de $[-1,1]^n$ de mesure non-nul, donc $I_n < \pi$ pour $n \geq 7$.

□

A Annexe

A.1 Analyse réelle & complexe

A.1.1 Lemme sur les fonctions convexes d'une variable

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors, il y a équivalence entre :

1. La fonction f est convexe.
2. f est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines, c'est à dire, il existe une partie $\emptyset \neq \Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ telle que

$$f(x) = \sup_{(a,b)\in\Gamma} (ax + b) \quad \forall\, x \in I \quad .$$

A.1.2 Lemme sur les fonctions convexes de deux variables

Soit $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et 1-homogène, c'est à dire

$$F(\alpha\mathbf{x}) = \alpha F(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2,\ \alpha \geq 0 \quad .$$

Alors, il y a équivalence entre :

1. La fonction F est convexe.
2. La restriction $F(\cdot, 1)$ est convexe.
3. Il existe une $\emptyset \neq \Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ telle que

$$F(u,v) = \sup_{(a,b)\in\Gamma} (au + bv) \quad \forall\, (u,v) \in \mathbb{R}_+^2$$

A.1.3 Lemme sur l'addition des nombres complexes

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Si $1 \leq p \leq 2$, alors

$$|a+b|^p + |a-b|^p \geq \big|\, |a| + |b| \,\big|^p + \big|\, |a| - |b| \,\big|^p$$

et si $2 \leq p < \infty$ alors

$$|a+b|^p + |a-b|^p \leq \big|\, |a| + |b| \,\big|^p + \big|\, |a| - |b| \,\big|^p$$

Preuve : Notons $a = |a|\, e^{i\alpha}$, $b = |b|\, e^{i\beta}$, alors d'une part

$$|a \pm b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm 2\,|a|\,|b| \cos(\beta - \alpha) \quad .$$

D'autre part

$$|a \pm b|^2 = \underbrace{\frac{1 \pm \cos(\beta-\alpha)}{2}}_{=:\lambda_\pm \in [0,1]} \cdot \big|\, |a| + |b| \,\big|^2 + \underbrace{\frac{1 \mp \cos(\beta-\alpha)}{2}}_{1-\lambda_\pm} \cdot \big|\, |a| - |b| \,\big|^2 \quad .$$

Si $p \leq 2$, l'application $x \mapsto x^{\frac{p}{2}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$|a \pm b|^p \geq \lambda_\pm \cdot \big|\, |a| + |b| \,\big|^p + (1 - \lambda_\pm) \cdot \big|\, |a| - |b| \,\big|^p$$

et finalement

$$|a+b|^p + |a-b|^p \geq \big|\, |a| + |b| \,\big|^p + \big|\, |a| - |b| \,\big|^p \quad .$$

La cas $p \geq 2$ est de même façon.

$\square$

A.1.4 Lemme : Polynômes d'Hermite et densité normale

Soit ν_s la densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}_{0,s}$ sur $\mathbb{R}$ de variance s, c'est-à-dire

$$\nu_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}} \quad .$$

Alors, sa n-ième dérivée $\nu_s^{(n)}$ est de la forme

$$\nu_s^{(n)}(x) = \left(\frac{-1}{\sqrt{s}}\right)^n \cdot H_n\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) \cdot \nu_s(x) \quad ,$$

où $(H_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est une unique suite de polynômes, appelés **polynômes d'Hermite**.

A.1.5 Lemme : Fuit à l'infinité des fonctions uniformément continues, intégrables

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ intégrable, uniformément continue. Alors

$$f(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

Preuve : Sans perdu de généralité on suppose que f est réelle. Supposons le contraire de l'affirmation, alors il existe un $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ telle que $\|x_n\| \uparrow \infty$, $\|x_{n+1} - x_n\| \geq 2$ et $|f(x_n)| \geq 2\varepsilon$. Choisissons un $0 < \delta < 1$ tel que $|f|\,\big|_{B_\delta(x_n)} \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \; dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_\delta(x_n)} |f(x)| \; dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon \cdot \mathrm{Vol}(B_\delta(x_n)) = \infty \quad ,$$

ce qui est une contradiction.

$\square$

A.2 Espaces de Banach & de Hilbert

A.2.1 Definition: Opérateur adjoint

Soient E, F espaces normés et $T : E \to F$ linéaire, continue. Alors, l'application linéaire, continue $T_* : F' \to E'$ définie par

$$T_* a \mapsto (a \circ T) \quad , \quad a \in F'$$

est dit l'opérateur **adjoint** de T.

Remarque : L'application $T_* : F' \to E'$ est vraiment bien définie, linéaire et bornée avec $\|T_*\| \leq \|T\|$.

A.2.2 Lemme : Adjoints d'isomorphismes

Soient E, F espaces normés et $T : E \to F$ un isomorphisme continue. Alors son opérateur adjoint $T_* : F' \to E'$ est un isomorphisme continue avec inverse $(T_*)^{-1} = (T^{-1})_*$.

Preuve : C'est facile de voir que $T_* \circ (T^{-1})_* = \mathrm{Id}_{E'}$ et $(T^{-1})_* \circ T_* = \mathrm{Id}_{F'}$.

$\square$

A.2.3 Definition: Dérivation de Gâteaux

Soient E, F deux espaces normés. Alors, on dit une application $f : E \to F$ **Gâteaux-dérivable** (où **Gâteaux-différentiable**) en $u \in E$ ssi il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire continue $\delta_x f : E \to F$ telle que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(u+tv) - f(u)}{t} = (\delta_x f)v \quad \forall\, v \in E \quad ,$$

où on considère $t \in \mathbb{R}$. Cette unique forme linéaire $\delta_x f$ est dit **Gâteaux-dérivation** de f en u.

Remarques :

(i) La notion de Gâteaux-différentiabilité est plus faible que la différentiabilité au sens de Fréchet et généralement plus facile à vérifier.

(ii) Si $f : E \to F$ est Fréchet-différentiable en $u \in E$ avec Fréchet-dérivation $D_u f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est aussi Gâteaux-dérivable avec Gâteaux-dérivation $\delta_u f = D_u f$.

(iii) Si $f : E \to F$ admet un extremum local en $u \in E$ et est Gâteaux-différentiable en u, sa différentielle $\delta_u f$ en u est nulle.

A.2.4 Inégalité des accroissements finis

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espaces vectoriels normés, $a, b \in E$ et $f : E \to F$ Gâteaux-dérivable en tout point de l'*intervalle* $[a.b] \subseteq E$. Alors on a l'inégalité

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \sup_{x\in[a,b]} \|\delta_x f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \cdot \|b - a\|_E \quad , \tag{A.2.4.1}$$

où $\delta_x f \in \mathcal{L}(E, F)$ est la dérivation de Gâteaux au point $x \in E$.

Preuve : L'application $\varphi : [0, 1] \to F$ donnée par $\varphi(t) := f(a + t(b - a))$ est différentiable pour tout point de $[1, 0]$ avec dérivation

$$\varphi'(t) := \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_t = (\delta_{a+t(b-a)} f)(b - a) \quad .$$

D'une part

$$\|\varphi'(t)\|_F \leq \left\|\delta_{a+t(b-a)} f\right\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|b - a\|_E$$

et d'autre part par l'inégalité des accroissements finis pour fonctions sur $\mathbb{R}$:

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\|_F \leq \sup_{t\in[0,1]} \|\varphi'(t)\|_F \cdot \|1 - 0\|_{\mathbb{R}} \quad ,$$

d'où suit l'affirmation (A.2.4.1).

□

A.3 Espaces métriques et topologiques

A.3.1 Lemme : Distance d'une compacte d'une fermée

Soit (X, d) un espace métrique, $K \subseteq X$ compact et $F \subseteq X$ fermé tels que $K \cap F = \emptyset$. Alors $d(K, F) > 0$.

Preuve : On sait que l'application $d(\cdot, F) : X \to \mathbb{R}$ est continue et $d(\cdot, F)\big|_{F^c} > 0$. D'autre part

$$d(K, F) = \inf_{x\in K} d(x, F) \quad .$$

Comme $d(\cdot, F)\big|_K$ est continue sur une compacte, il existe un $x_0 \in K$ tel que $d(x_0, F) = d(K, F)$. Comme $x_0 \notin F$, on a $d(x_0, F) > 0$, d'où on déduit l'affirmation.

□

A.3.2 Lemme : Composition des fonctions Lipschitziennes

Soit (X, d) un espace métrique et $f, g : X \to \mathbb{C}$ fonctions Lipschitziennes.

1. Si f et g sont bornées, alors leur produit $f \cdot g : X \to \mathbb{C}$ est borné et Lipschitzienne.
2. Si f est bornée et s'il existe une constante $C > 0$ telle que $0 < C \leq |g(x)|\ \forall x \in X$, alors $\frac{f}{g} : X \to \mathbb{C}$ est bornée et Lipschitzienne.

Preuve : Soient $\alpha, \beta > 0$ constantes de Lipschitz pour f et g respectivement.

1. Pour $x, y \in X$ on a

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x)[g(x) - g(y)]| + |g(y)[f(x) - g(y)]| \leq [\|f\|_\infty \cdot \beta + \|g\|_\infty \cdot \alpha] \cdot |x - y| \quad ,$$

c'est-à-dire fg est Lipschitzienne. Evidement elle est bornée.

2. Par hypothèse, les fonctions f et $\frac{1}{g} : X \to \mathbb{C}$ sont bornées. Par (1) il suffit donc de montrer que g est Lipschitzienne. Pour $x, y \in X$ on a

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)g(y)|} \leq \frac{1}{C^2} \cdot |g(x) - g(y)| \leq \frac{\beta}{C^2} \cdot |x - y| \quad .$$

□

A.3.3 Lemme : Sous-additivité du module de continuité

Soit X une sous-partie convexe d'un espace normé et (Y, d) un espace métrique quelconque. Soit $f : X \to Y$ une application n'importante quelle, alors son module de continuité $\omega_f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est sous-additive.

Preuve : Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq$ quelconques. On va montrer que

$$\omega_f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leq \omega_f(\varepsilon_1) + \omega_f(\varepsilon_2) \quad .$$

Comme le cas que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ et trivial, nous supposons que $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Il faut montrer que si $\|x - y\| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, alors $d(f(x), f(y)) \leq \omega_f(\varepsilon_1) + \omega_f(\varepsilon_2)$. Posons

$$z := \frac{\varepsilon_2 x + \varepsilon_1 y}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad ,$$

(*barycentre de x et y pour les poids ε_2 et ε_1*), alors $z \in X$ par convexité de X. Alors

$$|z - x| = \left| \varepsilon_1 \cdot \frac{y - x}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right| \leq \varepsilon_1 \quad .$$

De même $|z - y| \leq \varepsilon_2$. Par conséquence

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y)) \leq \omega_f(\varepsilon_1) + \omega_f(\varepsilon_2) \quad ,$$

de qui suit l'affirmation.

□

A.3.4 Definition: Espace localement compact

Un espace topologique X est dit **localement compacte** si pour tout $x \in X$ il existe une ouverte $U \subseteq X$ et compacte $K \subseteq X$ tels que $x \in U \subseteq K$.

A.3.5 Definition: Mesure de Radon

Soit X un espace topologique de Hausdorff et $\mathscr{B}(X)$ sa σ-algèbre Borelienne. Une mesure μ sur $(X, \mathscr{B}(X))$ est dit **Radon** s'il est localement fini et régulier intérieurement.

Remarque : Tout partie $K \subseteq X$ compacte à mesure finie : Prendre pour chaque point $x \in K$ une voisinage U_x de x telle que $\mu(U_x) < \infty$, alors K est contenu dans une union finie des ces voisinages.

A.3.6 Lemme : La procédure de diagonalisation de Cantor

Soit T un espace topologique de Hausdorff et $T_k \subseteq T,\ k \in \mathbb{N}$ sous-espaces séquentiellement compacts. Soit $X := \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un ensemble nombrable et

$$T^X := \{f : X \to T : f(x_k) \in T_k\}$$

l'ensemble de fonctions de X dans T qui envoie chaque x_k dans T_k. Soit T^X munit de la notion de convergence ponctuelle, c'est-à-dire

$$f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f \quad :\Leftrightarrow \quad f_n(x_k) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_k) \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T^X,\ f \in T^X \quad .$$

Alors, toute suite $(f_n) \subseteq T^X$ possède une sous-suite convergente.

Preuve : Car T_k est séquentiellement compact, il existe une sous-partie infinie $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ telle que

$$\exists \lim_{\substack{n\in N_1\\ n\to\infty}} f_n(x_1) =: f(x_1)$$

(sous-suite convergente). Note que, comme T est de Hausdorff, ce limite est unique. De même, il existe une sous-partie infinie $N_2 \subseteq N_1$ telle que

$$\exists \lim_{\substack{n\in N_2\\ n\to\infty}} f_n(x_2) =: f(x_2) \quad .$$

Par induction, on trouve une suite décroissante $\mathbb{N} \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$ et une fonction $f \in T^X$ tels que

$$\exists \lim_{n\in N_k n\to\infty} f_n(x_k) = f(x_k) \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad .$$

Pour $j \in \mathbb{N}$ pose n_j comme le j-ème élément dans N_j (d'où le nome de la procédure). Note que pour tout $j \geq k$ on a toujours $n_j \in N_k$. On a trouvé donc une sous-suite $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$f_{n_j}(x_k) \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} f(x_k) \quad \forall\, x_k \in X \quad .$$

□

Preuve : Le lemme est équivalent à : Tout produit dénombrable des espaces topologiques séquentiellement compacts, est lui même séquentiellement compact par rapport à la topologie produit.

A.3.7 Lemme : Produit des espaces métriques

Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques non-vides. Alors, l'application

$$d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R} \quad , \quad d((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})) := \max\{d_X(x,\tilde{x}), d_Y(y,\tilde{y})\}$$

fait de $X \times Y$ un espace métrique, dont la topologie est la même comme la topologie produit. On appelle la métrique d la **métrique produit** sur $X \times Y$. Les espaces X, Y sont complets ssi $X \times Y$ est également.

Preuve : Évidement, d est une métrique sur $X \times Y$.
Proposition : La topologie de $(X \times Y, d)$ est une sous-topologie de la topologie produit.

> **Preuve :** Pour le montrer, il suffit de montrer que toute boule ouverte $B^o_r((x,y))$ de $(X \times Y, d)$ est ouverte par rapport à la topologie produit, noté $\mathscr{O}(X \times Y)$. Pour cela, il suffit [20] de montrer qu'il existe une $U \in \mathscr{O}(X \times Y)$ telle que $(x,y) \in U \subseteq B^o_r((x,y))$. Mais en effet, le produit $U := B^o_r(x) \times B^o_r(y) \in \mathscr{O}(X \times Y)$ satisfait cette affirmation.

Proposition : La topologie produit $\mathscr{O}(X \times Y)$ est une sous-topologie de $(X \times Y, d)$.

20. Comme tout point dans $B^o_r((x,y))$ est lui même centre d'une boule ouverte non-triviale contenant dans $B^o_r((x,y))$.

Preuve : Se rappeler que les boules ouvertes dans X et Y forment des bases des topologies dans X et Y respectivement. Donc, les produits $B^o_r(x) \times B^o_s(y)$ de boules forment une base de la topologie produit $\mathscr{O}(X \times Y)$. Donc, il suffit de montrer que tout produit $B^o_r(x) \times B^o_s(y)$ est ouvert dans $(X \times Y, d)$. Soit $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in B^o_r(x) \times B^o_s(y)$ quelconque. Alors, il existe $\tilde{r} > 0, \tilde{s} > 0$ tels que $B^o_{\tilde{r}}(\tilde{x}) \subseteq B^o_r(x)$ et $B^o_{\tilde{s}}(\tilde{y}) \subseteq B^o_s(y)$. Posons $\varepsilon := \min\{\tilde{r}, \tilde{s}\}$, alors $B^o_\varepsilon((\tilde{x}, \tilde{y})) \subseteq B^o_r(x) \times B^o_s(y)$.

Proposition : En supposant que $(X, d_X), (Y, d_Y)$ sont complets, le produit $(X \times Y, d)$ est complet.

Preuve : Soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \times Y$ une suite de Cauchy. Alors, $(x_n)_n \subseteq X$ et $(y_n)_n \subseteq Y$ sont aussi suites de Cauchy, donc convergent vers un $x \in x$ et $y \in Y$ respectivement. Donc, $(x_n, y_n)_n$ converge vers $(x, y) \in X \times Y$.

Proposition : En supposant que $(X \times Y, d)$ est complet, les espaces $(X, d_X), (Y, d_Y)$ sont également.

Preuve : Soit $(x_n)_n \subseteq X$ une suite Cauchy. En prenant un point $y_0 \in Y$ quelconque, on voir que la suite $((x_n, y_0))_n \subseteq X \times Y$ est de Cauchy, donc converge vers un $(x, y) \in (X \times Y)$. En particulier, $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. De même façon, on montre que Y est complet.

$\square$

A.4 Le noyau de Dirichlet

A.4.1 Lemme sur l'intégral de sinus cardinales

Soit $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie comme

$$I(x) := \int_0^x \operatorname{sinc}(x)\ dx \quad .$$

Alors $0 \le I(x) \le I(\pi)$ et $\lim\limits_{x\to\infty} I(x) = \frac{\pi}{2}$.

Elaboration : Sur tout intervalle de la forme $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ avec $n \in \mathbb{N}_0$, sinc est positive et donc I croisante. De même, sur tout intervalle de la forme $[(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$ avec $n \in \mathbb{N}_0$, sinc est négative et donc I croissante. En posant $\Delta I_n := I\left((n+1)\pi\right) - I(n\pi)$, il suffit donc de montrer que $|\Delta I_n| \ge |\Delta I_{n+1}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. On a

$$\Delta I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\ d\vartheta = \int_0^\pi (-1)^n \frac{\sin(t)}{t + n\pi}\ dt = (-1)^n \left|\Delta I_n\right| \quad .$$

Comme

$$|\Delta I_n| = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t + n\pi}\ dt \ge \int_0^\pi \frac{\sin t}{t + (n+1)\pi}\ dt = |\Delta I_{n+1}| \quad ,$$

on en déduit l'affirmation $0 \le I \le I(\pi)$. Note que pour $t \in [0, 2\pi]$ on a $0 \le \frac{\sin t}{t+n\pi} \le \frac{\sin t}{n\pi}$ et donc $|\Delta I_n| \le \frac{2}{n\pi}$, c'est-à-dire $|\Delta I_n| \downarrow 0$. Par conséquence la série alternante

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left|\Delta I_n\right| = \sum_{n=0}^\infty \Delta I_n = \lim_{n\to\infty} I(n\pi)$$

converge. Comme $I(t)$ est toujours compris entre $I(n\pi)$ et $I((n+1)\pi)$ pour $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$, $n \in \mathbb{N}_0$, on en déduit que $I(t)$ possède une limite quand $t \to \infty$. On peut en fait montrer que cette limite est $\pi/2$ (sans preuve).

$\square$

A.4.2 Lemme sur l'intégral du noyau de Dirichlet

Pour $N \in \mathbb{N}_0$ soit $D_N \in \mathcal{C}_{2\pi}$ le noyau de Dirichlet d'ordre N comme défini dans 3.3.1. Alors, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$-x + \int_0^x D_N(t)\ dt = 2\sum_{n=1}^N \frac{\sin(nx)}{n} =: T_N(x) \tag{A.4.2.1}$$

De plus, la famille des $T_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N}_0$ est uniformément bornée, c'est-à-dire

$$\sup_{N\in\mathbb{N}_0} \|T_N\|_\infty < \infty \quad . \tag{A.4.2.2}$$

Preuve : On commence par la définition de T_N et trouve que

$$T_N(x) + x = 2\sum_{n=1}^{N} \int_0^x \cos(nt)\ dt + \int_0^x 1\ dt = \int_0^x \Big[\sum_{n=1}^{N} \underbrace{2\cos(nt)}_{e^{int}+e^{-int}} + 1\Big]\ dt = \int_0^x D_N(t)\ dt \quad ,$$

ce qui prouve l'identité (A.4.2.1). On va montrer que tout T_N est bornée par la valeur

$$\|T_N\|_\infty \leq \int_0^\pi \varphi(t)\ dt + 2\cdot I(\pi) + \pi < \infty \quad ,$$

où $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ convenante, indépendante de $N \in \mathbb{N}_0$.

Définition de φ : On définit $\varphi : (0,\pi] \to \mathbb{R}$ comme $\varphi(t) := \frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{2}{t}$ et remarque que $\sin\vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + o(\vartheta^3)$ quand $\vartheta \to 0$. Donc, quand $t \to 0^+$ on a

$$\varphi(t) = \frac{\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}} = \frac{\frac{t^3}{48} + o(t^3)}{\frac{t}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{t^3}{48} + o(t^3)\right)} = t\cdot\frac{\frac{1}{48} + o(1)}{\frac{1}{4} + o(1)} = \frac{t}{12} + o(t)$$

et par conséquence $\varphi(t) \xrightarrow{t\to 0} 0$. On pose $\varphi(0) := 0$ et remarque que

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \frac{1}{12} + o(1) \xrightarrow{t\to 0} \frac{1}{12} \quad .$$

Donc $\varphi'(0) = \frac{1}{12}$. En faisant un développement limite de φ' en 0, on vérifie que φ' et continue. On note que φ est non-negative sur tout $[0,\pi]$.

On se rappelle à la représentation

$$D_N(x) = \frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})x\right]}{\sin(x/2)}$$

de $D_N(x)$. En cas $x \in [0,\pi]$ on peut donc écrire

$$T_N(x) \overset{(A.4.2.1)}{=} -x + \int_0^x \sin\left[\left(N+\tfrac{1}{2}\right)t\right]\cdot\varphi(t)\ dt + \int_0^x \frac{2}{t}\cdot\sin\left[\left(N+\tfrac{1}{2}\right)t\right]\ dt$$

$$= -x + \int_0^x \sin\left[\left(N+\tfrac{1}{2}\right)t\right]\cdot\varphi(t)\ dt + 2\underbrace{\int_0^{(N+\frac{1}{2})x} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\ d\vartheta}_{I\left[(N+\frac{1}{2})x\right]}$$

où $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est définie comme dans A.4.1. Note que toujours $0 \leq I \leq I(\pi)$. Donc

$$|T_N(x)| \leq \underbrace{|x|}_{\leq\pi} + \int_0^x \underbrace{\left|\sin\left[\left(N+\tfrac{1}{2}\right)t\right]\cdot\varphi(t)\right|}_{\leq\varphi(t)}\ dt + 2\cdot I(\pi) \leq \pi + \int_0^\pi \varphi(t)\ dt + 2\cdot I(\pi) =: C \quad .$$

Comme φ est continue sur le compact $[0,\pi]$ on sait que $C < \infty$. Notons que C ne dépende pas de $x \in [0,\pi]$. Comme T_N est 2π-périodique et impaire, on conclut $|T_N(x)| \leq C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme C ne dépende pas de N, on conclut que les $(T_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ sont uniformément bornées par C.

□

A.4.3 Exemple : Existence des fonctions *mauvaises*

Le but de cet exemple est de trouver une fonction continue, 2π-périodique $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont la série de Fourier $S_N(F)$ n'est pas convergente en 0. Pour $n \in \mathbb{N}_0$ soit $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme dans A.4.2, c'est-à-dire $T_n(x) := -x + \int_0^x D_n(t)\ dt$. Pose

$$f_n(x) := \frac{1}{n^2} \sin\left(2^{n^2+1}x\right) \cdot T_{2^{n^2}}(x) \quad ,$$

alors par A.4.2 $\|f_n\|_\infty \leq \frac{C}{n^2}$ pour une constante $C > 0$ universelle. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2} < \infty \quad ,$$

c'est-à-dire la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement dans $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$. Comme $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est complète, la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformément vers une 2π-périodique continue $F \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

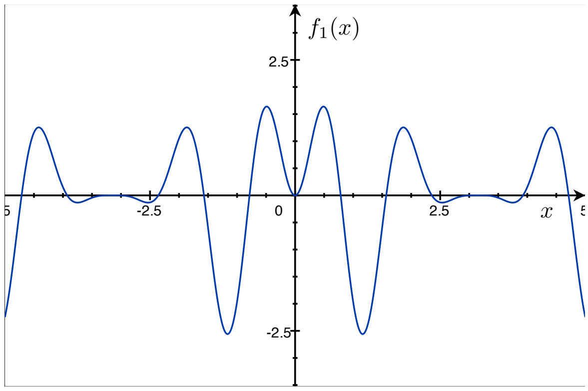

Figure 4: Sur exemple A.4.3 : Graphe de la fonction $f_n(x)$ pour $n = 1$.

Pour $l \in \mathbb{N}_0$ on note

$$a_l(F) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \cos(lt)\ dt = \mathcal{F}_l(f) + \mathcal{F}_{-l}(f) \quad . \tag{A.4.3.1}$$

On va montrer que

$$a_l(F) = \begin{cases} \frac{1}{n^2 k} & : l = 2^{n^2+1} - k,\ n \in \mathbb{N}_0,\ 1 \leq k \leq 2^{n^2} \\ -\frac{1}{n^2 k} & : l = 2^{n^2+1} + k,\ n \in \mathbb{N}_0,\ 1 \leq k \leq 2^{n^2} \\ 0 & : \text{ailleurs} \end{cases} \quad , \tag{A.4.3.2}$$

d'où on va déduire que la série $S_N(F)$ de Fourier de F diverge en 0. Remarque que

$$a_l(F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos(lt)\ dt \overset{A.4.4}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t) \cos(lt)\ dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_l(f_n) \quad , \tag{A.4.3.3}$$

où on à utilisé le fait que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(l\cdot)$ converge normalement et donc uniformément. D'autre part

$$f_n(x) \overset{(A.4.2.1)}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{2}{k} \sin\left(2^{n^2+1}x\right) \sin(kx)$$

$$= \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{1}{n^2 k} \left[\cos\left[\left(2^{n^2+1} - k\right) x\right] - \cos\left[\left(2^{n^2+1} + k\right) x\right]\right]$$

c'est-à-dire

$$a_l(f_n) = \begin{cases} \frac{1}{n^2 k} & : l = 2^{n^2+1} - k,\ 1 \le k \le 2^{n^2} \\ -\frac{1}{n^2 k} & : l = 2^{n^2+1} + k,\ 1 \le k \le 2^{n^2} \\ 0 & : \text{ailleurs} \end{cases}$$

pour $n \in \mathbb{N}$. Comme les sous-parties $\left\{2^{n^2+1} \pm k\right\}_{k=1}^{2^{n^2}}$, $n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux disjointes, par (A.4.3.3) on en déduit (A.4.3.2). Donc

$$S_N(F)(0) = \sum_{n=-N}^{N} \mathcal{F}_N(F) = \mathcal{F}_0(F) + \sum_{l=1}^{N} a_l(F) \quad .$$

En particulier

$$S_{2^{n^2+1}}(F)(0) - S_{2^{n^2+1} - 2^{n^2}}(F)(0) = \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{1}{n^2 k} \ge \frac{1}{n^2}\left[1 + \frac{n^2}{2}\right] \ge \frac{1}{2} \quad , \tag{A.4.3.4}$$

ce qui implique que la série des sommes partielles $S_N(F)(0)$ n'est pas de Cauchy et donc pas convergente. Note qu'on a utilisé l'**inégalité d'Oresme**

$$\sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{1}{k} > 1 + \frac{n^2}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad .$$

Noter que la sous-suite $(S_{N_n}(F))_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $N_n := 2^{n^2+1} + 2^{n^2}$ est égale à la série partielle $\sum_{k=1}^{n} f_k$ et converge donc uniformément, même si $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ elle même n'est pas convergente, même ponctuellement.

□

A.4.4 Lemme : Changement des intégraux et sommes

Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ une compacte et $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctions $f_k : K \to \mathbb{C}$ mesurables tels que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_n$$

converge uniformément sur K. Alors

$$\int_K \sum_{k=1}^{\infty} f_n \, d\lambda^n = \sum_{k=1}^{\infty} \int_K f_k \, d\lambda^n \quad .$$

Preuve : Comme $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$ converge uniformément, il existe un $C > 0$ tel que $|\sum_{k=1}^{m} f_n(x)| \le C$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Comme la constante C est intégrable sur K, par Lebesgue on obtient

$$\int_K \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\lambda^n = \int_K \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} f_k \, d\lambda^n \overset{\text{Lebesgue}}{=} \lim_{m \to \infty} \int_K \sum_{k=1}^{m} f_k \, d\lambda^n = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \int_K f_k \, d\lambda^n \quad ,$$

ce qui complète la preuve.

□

A.5 Le lemme de Zorn

A.5.1 Definition: Ordre partiel, total

Une relation binaire "$\leq$" sur un ensemble $X \neq \emptyset$ est dit un **ordre partiel** si elle satisfait :
- **Réflexivité**, c'est-à-dire $x \leq x$ pour tout $x \in X$.
- **Antisymétrique**, c'est-à-dire pour tout $x, y \in X$ on a $x \leq y$ et $y \leq x$ ssi $x = y$.
- **Transitive**, c'est-à-dire pour $x, y, z \in X$ tels que $x \leq y$ et $y \leq z$, on a $x \leq z$.

On dit $(X, \leq)$ un **ensemble partiellement ordonné**. On dit deux $x, y \in X$ satisfaisant $x \leq y$ ou $y \leq x$ **comparables**. Un ordre partiel est dit un **ordre total** si tous $x, y \in X$ sont comparables. En ce cas, on dit $(X, \leq)$ **totalement ordonné**. Pour deux éléments $x, y \in X$ on écrit $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$.

Exemples

(i) L'ordre naturel "$\leq$" sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ est un ordre total.

(ii) La relation binaire "$\leq$" sur $\mathbb{C}$ définie comme $z \leq w :\Leftrightarrow \Re(z) \leq \Re(w) \ \wedge \ \Im(z) \leq \Im(w)$ est un ordre partiel. Elle n'est pas totale, car 1 et i par exemple ne sont pas comparables.

(iii) La relation binaire $z \leq w :\Leftrightarrow |z| \leq |w|$ sur $\mathbb{C}$ n'est pas un ordre partiel, car elle n'est pas antisymétrique.

A.5.2 Definition: Elément majorant, maximal

Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné et $C \subseteq X$ un sous-ensemble. On dit que $x \in X$ est un **majorant** de C si $c \leq x$ pour tout $c \in C$. On dit que $c_m \in C$ est un élément **maximal** de C s'il n'existe pas de $c \in C$ tel que $c_m < c$. Noter qu'un élément maximal d'un sous-ensemble totalement ordonné, est aussi un majorant.

On dit que X est **inductif** si tout sous-ensemble $C \subseteq X$ totalement ordonné admet un majorant dans X.

A.5.3 Lemme de Zorn

Tout ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$ non-vide, inductif, admet un élément maximal.

B Symboles & Abréviations

ssi : Si et seulement si.

$\mathbb{R}_+$ **:** $= [0, \infty)$.

$\mathbb{C}_+$ **:** $\mathbb{R}_+ + i\mathbb{R}_+$.

$\mathbb{K}$ **:** Corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\mathbb{P}$ **:** Les nombres premiers.

$\mathcal{C}(X, Y)$ **:** Fonctions continues entre les espaces topologiques X, Y.

$\mathcal{C}_c(X, E)$ **:** Fonctions continues sur l'espace topologique X dans l'espace vectoriel E avec support compact.

$\mathcal{C}_b(X, E)$ **:** Fonctions continues, bornées sur l'espace topologique X dans l'espace normé E.

$\mathcal{C}^n_{2\pi}$ **:** Fonctions de $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ 2π-périodiques. Voir 3.1.1.

$L^p_{2ß}$ **:** Fonctions complexes sur $\mathbb{R}$ 2π-périodiques, de norme $\|\cdot\|_{L^p([0,2\pi])}$ finie. Voir 3.1.1.

$\mathscr{B}(X)$ **:** σ-algèbre Borelienne sur l'espace topologique X.

λ^n **:** Mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$.

$\mathscr{P}(\Omega)$ **:** L'ensemble des parties de l'ensemble Ω.

$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ **:** Anneau des $\mathbb{K}$-endomorphismes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V.

$\ker(f)$ **:** Noyau du homomorphisme f.

$L^p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ **:** Espace des classes des fonctions p-intégrables sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$.

E' **:** Espace dual topologique d'un espace normé E.

$B_r(x)$ **:** Boule fermée de rayon r et centre x.

$B^o_r(x)$ **:** Boule ouverte de rayon r et centre x.

$\mathcal{T}_g$ **:** Forme linéaire correspondant à la fonction g. Voir 1.4.1.

$\mathcal{T}$ **:** L'application linéaire $\mathcal{T} : L^q \to L^p,\ g \mapsto \mathcal{T}_g$. Voir 1.4.1.

$\mathcal{L}(E, F)$ **:** Espace des applications linéaires, continués entre les espaces normés E, F.

$\delta_x f$ **:** Gâteaux-dérivation de la fonction $f : E \to F$. Voir A.2.3.

T_* **:** Opérateur adjoint de T. Voir A.2.1.

$x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ **:** Convergence faible des x_n vers x. Voir 2.4.1.

$a_n \underset{\mathbf{w*}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} a$ **:** Convergence faible* des a_n vers a. Voir 2.6.1.

$\mathrm{cl}(X)$ **:** L'adhérence d'un sous-espace topologique X : $\mathrm{cl}(X) = \overline{X}$.

$\mathcal{B}(X, Y)$ **:** L'ensemble des fonctions bornées d'un ensemble X dans un espace métrique Y. Voir 2.8.4(iv).

$\tau_h f$ **:** Translation de la fonction $f : E \to Y$ par $h \in E$: $(\tau_h f)(x) := f(x - h)$.

$\lambda_{2\pi}$ **:** Mesure de Lebesgue normé sur S^1. Voir 3.1.1.

e_n **:** Monôme trigonométrique sur S^1. Voir 3.1.2.

$\mathcal{E}_{2\pi}$ **:** L'espace linéaire des polynômes trigonométriques sur S^1. Voir 3.1.2.

$\mathcal{C}_{2\pi}$ **:** Espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues, 2π-périodiques. Voir 3.1.1.

$L^p_{2\pi}$ **:** Espace des p-intégrables fonctions sur S^1. Voir 3.1.1.

$\mathcal{F}_n(f)$ **:** n-ème Coefficient de Fourier de $f \in L^1_{2\pi}$. Voir 3.1.3.

$S_N(f)$ **:** Somme partielle de Fourier de $f \in L^1_{2\pi}$ d'ordre N. Voir 3.1.3.

$\mathrm{spec}(f)$ **:** Spectre d'une fonction $f \in L^1_{2\pi}$. Voir 3.1.3.

$\mathscr{G}(f)$ **:** Graphe d'une application $f : X \to Y$ entre deux ensembles X, Y : $\mathscr{G}(f) := \{(x, (f(x)) : x \in X\}$.

$\mathscr{T}(E, E')$ **:** Topologie faible sur l'espace normé E. Voir 2.4.2.

$\mathscr{T}(E', E)$ **:** Topologie faible* sur l'espace dual E' d'un espace normé E. Voir 2.6.2.

$f^{[\alpha]}$ **:** α-ième dérivée faible de $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$, où α est un multi-indice. Voir 1.8.1.

$W^{k,p}$ **:** Espace de Sobolev. Voir 1.8.4.

Références

[1] *L. Erdös*, Banach-Alaoglu Theorems
Universität München, 2007
http ://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼lerdos/WS06/FA/alaoglu.pdf (16.10.2010)

[2] *E. M. Stein, R. Shakarchi*, Fourier Analysis : An Introduction
Princeton University Press, 2003

[3] *C. Zuily, H. Queffélec*, Analyse pour l'agregation
Dunod, 2007

[4] *D. Werner*, Funktionalanalysis
Springer, 2005

[5] *V.I. Bogachev*, Measure Theory, Vol. 1
Springer, 2006

Index